Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 10. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Rechenregeln zur Teilbarkeit). Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ gilt: $(b \mid a_1 \ \wedge \ b \mid (a_1 + a_2)) \implies b \mid a_2$.

b) Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ gilt: $(b \mid a_1 \ \vee \ b \mid a_2) \implies b \mid (a_1 \cdot a_2)$.

c) Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ gilt: $b \mid (a_1 \cdot a_2) \implies (b \mid a_1 \ \vee \ b \mid a_2)$.

Aufgabe 2 (Teilbarkeit). Man beweise die folgenden Teilbarkeitsaussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

a) $3 \mid (4n^3 - n)$.

b) $4 \mid (5^n + 7)$.

c) $6 \mid (a^{2n+1} - a)$ für alle $a \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3 (b-adische Darstellungen). Man berechne die folgenden in Stellenwertsystemen gegebenen Zahlen $a \in \mathbb{N}_0$ und gebe dann ihre b-adische Darstellung an:

a) $a = (731)_9$ und $b = 4$.

b) $a = (10010101)_2$ und $b = 9$.

c) $a = (17)_{20}$ und $b = 16$.

Aufgabe 4 (Mächtigkeit von Potenzmengen). Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, und es sei

$$B_n := \{(a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1 a_0)_2 \mid a_0, \dots a_{n-1} \in \{0, 1\}\}$$

die Menge all derjenigen Zahlen in $\mathbb{N}_0$, deren Dualdarstellung höchstens n Ziffern besitzt.

a) Man bestimme $|B_n|$.

b) Es sei nun $M = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ eine Menge mit n verschiedenen Elementen. Man konstruiere eine bijektive Abbildung zwischen $\mathcal{P}(M)$ und B_n.

c) Man bestimme $|\mathcal{P}(M)|$.

(Vergleiche dazu auch Aufgabe 4 b) vom 3. Tutoriumsblatt. – Ein ganz anderer Beweis des Resultates aus c) findet sich auf dem 10. Übungsblatt, Aufgabe 4.)

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 8.–10. Januar 2014 behandelt.