Mathematisches Institut der Universität München Lukas-Fabian Moser
Wintersemester 2012/13

Gleichungen, Lösungsformeln, n-Ecke – 2. Übungsblatt

Aufgabe 1. Bestimme alle reellen Lösungen der quartischen Gleichung $x^4 - 27x^2 - 14x + 120 \stackrel{!}{=} 0$ mittels der Formel von Ferrari. Wiederhole das Verfahren für alle auffindbaren Lösungen der Kubischen Resolvente.

Aufgabe 2. Bestimme alle Lösungen der quartischen Gleichung $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 16x + 5 \stackrel{!}{=} 0$ mittels Reduktion der Gleichung und Anwendung der Formel von Ferrari.

Aufgabe 3. Beweise durch ein geometrisches Argument das Distributivgesetz für die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen, also die Beziehung $z \cdot (w + w') = (z \cdot w) + (z \cdot w')$ für alle $z, w, w' \in \mathbb{C}$.
(Tip: Zeige, daß es genügt, die beiden Fälle $z \in \mathbb{R}$ und $|z| = 1$ zu behandeln.)

Aufgabe 4*. In dieser Aufgabe geht es um einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra nach Argand und Cauchy aus der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Es sei $n \geqslant 1$ und

$$f(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad \text{mit} \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

eine Polynomfunktion auf $\mathbb{C}$. Angenommen, f habe keine komplexe Nullstelle.

i) Zeige: Es gibt einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, auf dem f einen betragsmäßig minimalen Wert annimmt, d.h. $|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Gehe dazu folgendermaßen vor:

   (a) Zeige, daß $|f|$ außerhalb einer genügend großen Rechtecks- (oder Kreis-)fläche Q um den Nullpunkt in der komplexen Ebene nur Werte annimmt, die größer als $|f(0)|$ sind.

   (b) Zeige, daß $|f|$ auf der Fläche Q einen betragsmäßig minimalen Wert annimmt.
   (Hierzu muß man nur verwenden, daß $|f|$ eine stetige Funktion ist.)

   Wir nehmen nun an, daß $z_0 = 0$ ist; warum ist das zulässig?

ii) Zeige, daß es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ gibt mit $|f(z)| < |f(0)|$.
   Schreibe dazu $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_r x^r + a_0$ mit $a_r \neq 0$ und zeige:

   (a) Zeige, daß es eine komplexe Zahl w gibt mit $w^r = -a_0/a_r$.

   (b) Zeige: Für ein genügend kleines $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt $|f(\varepsilon w)| < |f(0)|$.

Der Widerspruch aus i) und ii) beweist den Fundamentalsatz der Algebra.

Keine Abgabe und Korrektur. Fragen zu den Aufgaben können gerne per Mail, in der Sprechstunde oder nach der Vorlesung gestellt werden.