

## Algebra – Aufgabenblatt zur Klausurvorbereitung

**Aufgabe 1.** Es sei  $G$  eine Gruppe. Für  $g, h \in G$  nennen wir  $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$  den *Kommutator* von  $G$  und  $H$ .

- i) Zeige: Ist  $N \subset G$  ein Normalteiler, so ist  $[g, n] \in N$  für alle  $g \in G, n \in N$ .
- ii) Zeige: Für alle  $g, h, f \in G$  gilt  $f[g, h]f^{-1} = [fgf^{-1}, fhf^{-1}]$ .

**Aufgabe 2.**

- i) Finde einen Unterkörper  $K \subset \mathbb{C}$  mit  $[K : \mathbb{Q}] = 3$ ,  $K/\mathbb{Q}$  nicht galoissch.
- ii) Finde einen Unterkörper  $L \subset \mathbb{C}$  mit  $[L : \mathbb{Q}] = 3$ ,  $L/\mathbb{Q}$  galoissch.

**Aufgabe 3.** Besitzt die Gleichung  $X^3 - 1 = X$  eine Lösung im Körper mit 9 Elementen?

**Aufgabe 4.**

- i) Wieviele Untergruppen hat die Gruppe  $\mathbb{Z}/10000\mathbb{Z}$ ?
- ii) Finde alle Untergruppen der Gruppe  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 5.**

- i) Es sei  $R$  ein (kommutativer) Ring. Zeige: Sind  $r, s \in R$  nilpotent, so auch  $r + s$ .
- ii) Finde zwei nilpotente Matrizen  $M, N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , so daß  $M + N$  invertierbar ist.

**Aufgabe 6.** Es seien  $R, S$  kommutative Ringe.

- i) Bestimme alle invertierbaren Elemente des Rings  $R \times S$ .
- ii) Bestimme alle nilpotenten Elemente des Rings  $R \times S$ .

**Aufgabe 7.** Finde endliche Galoiserweiterungen  $L/K$  und  $M/L$ , so daß  $M/K$  nicht galoissch ist.

**Aufgabe 8.** Was ist die kleinste Zahl  $n \geq 1$ , für die es eine nicht-normale Körpererweiterung vom Grad  $n$  gibt? Gib ein Beispiel einer solchen Erweiterung an.

**Aufgabe 9.** Zeige: Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper.

**Aufgabe 10.** Zeige: Ist  $K$  ein endlicher Körper der Charakteristik  $p$ , so ist die Abbildung  $F : K \rightarrow K$ ,  $x \mapsto x^p$ , bijektiv.

**Aufgabe 11.**

- i) Zeige, daß das Polynom  $X^3 + 21X^2 + 6X + 9$  irreduzibel über  $\mathbb{Q}$  ist.
- ii) Es sei  $n \geq 1$ . Zeige, daß es in  $\mathbb{Q}[X]$  stets ein irreduzibles Polynom vom Grad  $n$  gibt.

**Aufgabe 12.** Es sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $f = X^4 + 6X^2 + 5$  über  $\mathbb{Q}$ .

- i) Wieviele Körperhomomorphismen  $L \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es?
- ii) Bestimme die Galoisgruppe von  $L/\mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 13.** Es sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $f = X^4 - 2X^3 + 2X - 4$  über  $\mathbb{Q}$ .

- i) Wieviele Körperhomomorphismen  $L \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es?
- ii) Bestimme die Galoisgruppe von  $L/\mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 14.** Zeige, daß jede Gruppe mit 280 Elementen auflösbar ist.

**Aufgabe 15.** Es sei  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$  und  $a = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ . Berechne  $N_{L/\mathbb{Q}}(a)$  und  $\text{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(a)$ .

Dieses Blatt ist nicht abzugeben und wird folglich auch nicht korrigiert. Es wird keine Musterlösungen geben, aber die Tutoren beantworten gerne Fragen zu diesen Aufgaben.