Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 9. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei $K := \mathbb{Q}(e^{\frac{2}{3}\pi i}, \sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{C}$.

i) Bestimme $[K : \mathbb{Q}]$.
ii) Zeige: K ist Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.
iii) Zeige: Ist $\varphi : K \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus, so ist $\varphi(K) = K$.

Aufgabe 2. Es sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ und $K := R/7R$.

i) Zeige: K ist ein Körper. (Hinweis: Verwende die Zusatzaufgabe ii) von Blatt 5.)
ii) Bestimme den Primkörper K_0 von K.
iii) Bestimme $[K : K_0]$.
iv) Ist K normal über K_0?

Aufgabe 3. Es seien $K \subset L \subset M$ algebraische Körpererweiterungen. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

i) M/K ist separabel.
ii) M/L und L/K sind separabel.

Aufgabe 4. Es sei $K \subset K(a)$ ein Körpererweiterung, und das Minimalpolynom $f \in K[X]$ von a sei separabel. Zeige, daß es eine Körpererweiterung $K \subset L$ zusammen mit K-Homomorphismen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : K(a) \to L$ gibt, so daß $f = \prod_{i=1}^{n}(X - \varphi_i(a))$ in $L[X]$ ist.

Aufgabe 5. Es sei p eine Primzahl, K ein Körper der Charakteristik p und $K \subset L$ eine endliche Erweiterung. Es sei

$$K^{p^{-\infty}} := \left\{ a \in L \,|\, a^{p^n} \in K \text{ für ein } n \geqslant 1 \right\}.$$

der *vollkommene Abschluß von* K *in* L. Zeige:

i) $K^{p^{-\infty}}$ ist ein Zwischenkörper der Erweiterung $K \subset L$.
ii) Ist L/K normal, so ist die Erweiterung $K^{p^{-\infty}} \subset L$ separabel, und es ist $[L : K]_s = [L : K^{p^{-\infty}}]$.

Aufgabe 6. Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

i) Es sei $L = K(T)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[T]$. Zeige: Das Polynom $X^p - T \in L[X]$ ist irreduzibel und nicht separabel.
ii) K ist genau dann vollkommen, wenn der Frobeniushomomorphismus $K \to K$ surjektiv (und damit bijektiv) ist.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 22. Dezember 2009, 14 Uhr** *geheftet* im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!