Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Für einen Ring R sei $\mathrm{Nil}(R) := \{r \in R \mid \exists n \geqslant 1 : r^n = 0\}$ die Menge aller nilpotenten Elemente von R. Zeige, daß $\mathrm{Nil}(R)$ ein Ideal in R ist (das sogenannte „Nilradikal").

Aufgabe 2. Es sei R ein Ring. Zeige: Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \to R$, und es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $n \geqslant 0$ mit $\ker(f) = n\mathbb{Z}$. (Man nennt $\mathrm{char}(R) := n$ die *Charakteristik* von R.)

Aufgabe 3. Für eine Zahl $d \in \mathbb{Z}$ sei $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. (Dabei bezeichnet $\sqrt{d}$ eine komplexe Quadratwurzel von $\mathbb{C}$; warum ist es egal, welche man nimmt?) Zeige:

i) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.
ii) Für die Menge der invertierbaren Elemente gilt

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \begin{cases} \{\pm 1\} & \text{für } d \leqslant -2, \\ \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\} & \text{für } d = -1. \end{cases}$$

iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ ist eine unendliche Menge.

Aufgabe 4. Zeige, daß der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ nicht faktoriell ist. (Tip: Faktorisiere die Zahl 4 in diesem Ring.)

Zusatzaufgabe.

i) Zeige: Ist R ein nullteilerfreier Ring, so ist $\mathrm{char}(R)$ entweder 0 oder eine Primzahl.
ii) Zeige, daß $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ein Hauptidealring ist.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 24. November 2009, 14 Uhr** im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!