Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 4. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei R ein Ring und $I \subsetneq R$ ein Ideal. Zeige: Die Faktorgruppe R/I läßt sich durch die Festlegung $(a+I) \cdot (b+I) := (ab) + I$ zu einem kommutativen Ring machen, und bezüglich dieser Struktur ist die kanonische Projektion $R \to R/I$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 2. Es sei p eine Primzahl und $G \neq \{e\}$ eine p-Gruppe. Zeige: Das Zentrum von G besteht nicht nur aus dem neutralen Element. (Tip: Bahnensatz für eine geeignete Operation.)

Aufgabe 3. Zeige: Ist G eine endliche Gruppe und q eine Primzahlpotenz mit $q \mid |G|$, so gibt es eine Untergruppe $H \subset G$ mit $q = |H|$. (Ariadnefaden: Mit den Sätzen über Sylowsche Untergruppen kann man auf den Fall reduzieren, daß G eine p-Gruppe ist. Danach hilft Induktion unter Verwendung von Aufgabe 2 – das Zentrum einer Gruppe ist ja immer normale Untergruppe!)

Aufgabe 4. Es sei G eine endliche Gruppe und $H \subsetneq G$ eine Untergruppe. Zeige: Ist $[G : H]$ der kleinste Primteiler von $|G|$, so ist H ein Normalteiler. (Anleitung: Untersuche die Operation von H auf G/H.)

Zusatzaufgabe. Nach Bekanntschaft mit dem Satz von Lagrange könnte man vermuten, daß jeder Teiler der Ordnung einer Gruppe auch Ordnung einer Untergruppe ist. Eine teilweise Bestätigung liefert Aufgabe 3, und man kann auch zeigen, daß die Vermutung für *abelsche* Gruppen richtig ist. Im allgemeinen ist sie jedoch falsch; in dieser Aufgabe präsentieren wir ein Gegenbeispiel (sogar das kleinstmögliche – warum?). Zeige nämlich: Die alternierende Gruppe A_4 hat 12 Elemente und besitzt keine Untergruppe der Ordnung 6.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 17. November 2009, 14 Uhr** im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!