Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 3. Übungsblatt

Aufgabe 1. Bestimme alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/729\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Es seien G, H endliche zyklische Gruppen. Zeige: $G \times H$ ist genau dann zyklisch, wenn $|G|$ und $|H|$ teilerfremd sind.

Aufgabe 3. Es sei G eine Gruppe und $H \lhd G$ ein Normalteiler. Zeige: G ist genau dann auflösbar, wenn sowohl H als auch G/H auflösbar sind.

Aufgabe 4. Zeige: Die symmetrischen Gruppen S_2 und S_3 sind auflösbar. *(Tatsächlich kann man zeigen: Auch S_4 ist auflösbar, jedoch nicht S_n für $n \geqslant 5$. Viel später, in der Galoistheorie, sorgen genau diese Tatsachen dafür, daß es Lösungsformeln für polynomiale Gleichungen vom Grad $\leqslant 4$ gibt, nicht jedoch für solche höheren Grades.)*

Zusatzaufgabe.

i) Zeige: In jeder Gruppe ist jede Untergruppe vom Index 2 normal.
ii) Für eine Gruppe G sei $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(G)$ die Gruppe der Gruppenautomorphismen von G. Zeige: Ist $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 10. November 2009, 14 Uhr** im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und besuchtes Tutorium (A bis G bzw. „kein Tutorium“) angeben!