Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 2. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen.

i) Zeige: φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{e\}$ ist.
ii) Es sei H' eine Untergruppe (ein Normalteiler) von H. Zeige: $\varphi^{-1}(H')$ ist eine Untergruppe (ein Normalteiler) von G.

Aufgabe 2. Es sei G eine Gruppe und $S \subset G$ eine Teilmenge. Zeige: Der *Normalisator* von S in G, definiert als

$$N_G(S) = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\},$$

ist eine Untergruppe von G.

Aufgabe 3. Es sei G eine Gruppe, $N \subset G$ ein Normalteiler und $\pi : G \to G/N$, $g \mapsto \overline{g} = gN$, die kanonische Projektion. Zeige: die Abbildung

$$\{\text{Untergruppen von } G, \text{ die } N \text{ enthalten}\} \to \{\text{Untergruppen von } G/N\}, \quad H \mapsto \pi(H) = H/N,$$

ist wohldefiniert und bijektiv, und sie induziert durch Einschränkung eine Bijektion

$$\{\text{Normalteiler von } G, \text{ die } N \text{ enthalten}\} \to \{\text{Normalteiler von } G/N\}.$$

Tip: Konstruiere eine Umkehrabbildung.

Aufgabe 4. Für $n \geqslant 2$ finde einen abelschen und einen nichtabelschen nichttrivialen Normalteiler von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. (Als „triviale“ Normalteiler gelten die ganze Gruppe und die einelementige Untergruppe.)

Zusatzaufgabe.

i) Finde alle endlichen Untergruppen von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$. (Dabei ist, wie immer, $\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$.)
ii) Eine (schwierigere) Fortsetzung zur Zusatzaufgabe der letzten Woche: Sind eigentlich die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$ isomorph?

Die Lösungen sind spätestens am **Mittwoch, 4. November 2009** im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und besuchtes Tutorium (A bis G bzw. X) angeben!
Achtung: Vom nächsten Blatt an werden die Übungsblätter bereits bis Dienstag, 14 Uhr, abzugeben sein!