Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Ein Blick über den Tellerrand zu Aufgabe 3 vom 1. Übungsblatt zur Algebra

Warum ist die Menge U in dieser Aufgabe eine Gruppe, und überhaupt: wie kommt man überhaupt darauf, diese Menge hinzuschreiben? Das kann man mit Begriffen aus der projektiven Geometrie verstehen – natürlich nur, wenn man Lust hat; zum Vorlesungsstoff gehört das sicher nicht.

Die reelle projektive Gerade. Die *reelle projektive Gerade* $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ ist der Quotient von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nach der folgenden Äquivalenzrelation: $(x,y) \sim (x',y')$ genau dann, wenn es sein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $(x',y') = (\lambda x, \lambda y)$. Die Klasse von (x,y) notiert man auch als $[x:y] \in \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$. Man kann sich überlegen, daß

$$i : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbf{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{[1:0]\}\,, \quad x \mapsto [x:1]$$

eine wohldefinierte Bijektion ist (insbesondere ist es damit sinnvoll, $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ tatsächlich eine Art „Gerade“ zu schimpfen).

Projektive lineare Abbildungen und die Gruppe $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ definiert eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, und es ist nicht schwer zu zeigen, daß diese sogar eine wohldefinierte Abbildung $P_A : \mathbf{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ induziert. Ist die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so ist konkret $P_A([x:y]) = [ax+by : cx+dy]$. Es gilt sogar $P_{AB} = P_A \circ P_B$, so daß wir einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1(\mathbb{R}))$ haben. Sein Kern besteht genau aus den Vielfachen der Einheitsmatrix, so daß wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1(\mathbb{R}))$, $[A] \mapsto P_A$, bekommen, wobei man

$$\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) / \{aE \,|\, 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$$

die „projektive lineare Gruppe“ nennt.

Projektive Abbildungen durch drei Punkte. Elemente von $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ lassen sich aber nicht nur durch Matrizen beschreiben, sondern auch folgendermaßen: Sind (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) zwei Tripel paarweise verschiedener Elemente von $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$, so gibt es genau eine Klasse von Matrizen $[A] \in \mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $P_A(a_i) = b_i$ für alle i. Das könnte man prima als Übungsaufgabe zur Linearen Algebra stellen; der Beweis wird etwas übersichtlicher, wenn man sich überlegt, daß man sich die Punkte a_1, a_2, a_3 dabei fest aussuchen kann, etwa $a_1 = [1:0]$, $a_2 = [0:1]$, $a_3 = [1:1]$.

Eine sechselementige Gruppe. . . ! Es sei nun $D := \{[1:1], [0:1], [1:0]\} \subset \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$. Es sei $V \subset \mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Menge der aller Klassen $[A] \in \mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, für die $P_A(D) \subset D$ ist (das ist sogar eine Untergruppe). Aus dem letzten Absatz folgt insbesondere, daß $|V| = 6$ ist.
Jedes Element $[A] \in V$ induziert nicht nur eine Abbildung von $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ in sich, sondern (nach Konstruktion) auch eine Abbildung von $\mathbf{P}^1(\mathbb{R}) \setminus D$ in sich. Aber die Bijektion i von ganz oben induziert ja eine

Bijektion zwischen $\mathbf{P}^1(\mathbb{R}) \setminus D$ und $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$! Die Einschränkung von Abbildungen induziert also einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : V \to \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1(\mathbb{R}) \setminus D) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{R} \setminus \{0,1\}).$$

Ich behaupte nun, daß das Bild von Φ genau die Menge U ist.

Die Elemente von V. Um das einzusehen, bestimmen wir explizit die Elemente von V. Eines sieht man schnell: nämlich dasjenige, das $[1:0]$ und $[0:1]$ miteinander vertauscht; es ist durch die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ein weiteres Element ist etwa dasjenige, das $[0:1] \mapsto [1:0] \mapsto [1:1]$ abbildet. Es muß gegeben sein durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

aber da auch $[1:1] \mapsto [0:1]$ gelten muß, folgt $a+b=0$, so daß wir etwa die Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nehmen können. Damit enthält V aber auch die Klassen der Matrizen

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

und zusammen mit der Einheitsmatrix (die gibt es auch noch!) haben wir damit schon alle sechs Elemente von V bestimmt, es ist also

$$V = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] \right\}$$

Finale. Nun sind wir fast fertig: Verfolgt man alle Abbildungen zurück, sieht man, daß ein Element von V, das durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$$

gegeben ist, unter Φ auf die Funktion $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ abgebildet wird. Damit ergibt sich

$$\Phi(V) = \left\{ x \mapsto x, x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto \frac{x-1}{x}, x \mapsto \frac{x}{x-1}, x \mapsto 1-x, x \mapsto \frac{1}{1-x} \right\} = U,$$

wie behauptet. (Insbesondere ist Φ injektiv – hätte man das auch direkt sehen können?)
Uff.