Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 11. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei L/K eine endliche separable Erweiterung und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluß von K. Zeige: Die Anzahl der K-Homomorphismen $L \to \overline{K}$ ist genau $[L : K]$.

Aufgabe 2. Es sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2.

i) Zeige, daß L/K normal ist. (Tip: Zeige, daß es ein $a \in L$ gibt mit $L = K(a)$, und betrachte dann dessen Minimalpolynom.)
ii) Zeige, daß L/K galoissch ist, falls $\mathrm{char}\, K \neq 2$ ist, und berechne dann $\mathrm{Gal}(L/K)$.
iii) Zeige, daß L/K nicht galoissch zu sein braucht, wenn $\mathrm{char}\, K = 2$ ist.

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper, $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluß von K und $K_s \subset \overline{K}$ der separable Abschluß von K, also

$$K_s = \left\{ x \in \overline{K} \mid x \text{ ist separabel über } K \right\} .$$

Zeige, daß K_s/K eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 4. Es sei L/K eine normale algebraische Erweiterung und $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluß von L.

i) Zeige, daß $\overline{L}$ auch ein algebraischer Abschluß von K ist.
ii) Zeige: Ist $\sigma : L \to \overline{L}$ ein K-Homomorphismus, so ist $\sigma(L) = L$.

Zusatzaufgabe. Es sei L/K eine separable algebraische Erweiterung und $n \geqslant 1$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $a \in L$ ist der Grad des Minimalpolynoms von a über K höchstens n. Zeige: Dann ist L/K endlich, und zwar vom Grad $\leqslant n$.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 19. Januar 2009, 14 Uhr** *geheftet* im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!