

Algebra – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Konstruiere jeweils eine Gruppe mit zwei, drei und mit vier Elementen. (Man könnte beispielsweise passende Untergruppen einer schon bekannten Gruppe suchen, oder auch eine Gruppentafel aufstellen – dann ist das Nachrechnen der Gruppenaxiome aber vielleicht etwas mühsam.)

Aufgabe 2. Diese Aufgabe enthielt einen Fehler, dessen Korrektur sie für ein erstes Übungsblatt zu schwierig machen würde. Unsere Strafe: Die 4 Punkte auf diese Aufgabe erhält bereits, wer überhaupt ein Übungsblatt abgibt.

Aufgabe 3. Betrachte die folgende Menge von Funktionen $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$U := \left\{ x \mapsto x, x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto 1 - x, x \mapsto \frac{1}{1 - x}, x \mapsto \frac{x}{x - 1}, x \mapsto \frac{x - 1}{x} \right\}.$$

Zeige: U ist eine Gruppe mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung.

Aufgabe 4. Es sei X eine Menge. Mit $\text{Aut}(X)$ (oder $S(X)$ oder $\mathfrak{S}(X)$) bezeichnen wir die Menge aller bijektiven Abbildungen $X \rightarrow X$. Zeige:

- i) Mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung versehen, ist $\text{Aut}(X)$ eine Gruppe.
- ii) Enthält X mindestens 3 Elemente, so ist $\text{Aut}(X)$ nicht abelsch.

Zusatzaufgabe. Mit $\mathbb{R}^\times := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ meinen wir die Menge der nichtverschwindenden reellen Zahlen, mit $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty)$ die Teilmenge der positiven reellen Zahlen. Nach den Rechenregeln für reelle Zahlen sind beide Mengen Gruppen bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation, ebenso \mathbb{R} selbst mit der gewöhnlichen Addition.

- i) Sind die Gruppen $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ isomorph?
- ii) Sind die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ isomorph?

Die Lösungen sind spätestens am **Mittwoch, 28. Oktober 2009** im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und besuchtes Tutorium (A bis G) angeben!