Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Es ist

$$\begin{aligned} P(\{3,4\}) &= P(\{1,2,3,4\}) - P(\{1,2\}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ \text{und damit} \quad P(\{1\}) &= P(\{1,3,4\}) - P(\{3,4\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ \text{sowie} \quad P(\{2\}) &= P(\{1,2\}) - P(\{1\}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(Es gibt auch andere mögliche Rechenwege, z.B. $P(\{2\}) = P(\{1,2,3,4\}) - P(\{1,3,4\}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.)

b) Es ist

$$\begin{aligned} P(\{2,5\}) &= P(\{1,2,3,5\}) - P(\{1,3\}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \\ \text{sowie} \quad P(\{4,6\}) &= P(\Omega) - P(\{1,2,3,5\}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ \text{und damit} \quad P(\{1,3,4,6\}) &= P(\{1,3\}) + P(\{4,6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Man kann auch z.B. $P(\{1,3,4,6\}) = P(\Omega) - P(\{2,5\}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ rechnen.)

c) Es muß $P(\{3\}) = 1-p_1 = \frac{1}{a}$ und $P(\{1\}) = 1-p_2 = \frac{1}{b}$ sein. Ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß existiert genau dann, wenn $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \in [0,1]$ sind und wenn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$ ist. Ersteres ist stets erfüllt wegen $a, b \in \mathbb{N}$; für zweiteres rechnen wir:

Wegen $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \in]0,1]$ und damit sicher $p_1, p_2 \in [0,1]$. Nun muß aber auch $p_1+p_2-1 \in [0,1]$ sein, also $p_1 + p_2 \in [1,2]$, und dies bedeutet $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$ – was für $a, b \in \mathbb{N}$ genau dann erfüllt ist, wenn $a, b \geq 2$ sind.

Es gibt also ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß genau dann, wenn ich nicht an einem Monatsersten und nicht im Januar geboren bin, und dann ist es eindeutig bestimmt mit den oben angegebenen Elementarwahrscheinlichkeiten.

Zur Frage nach der Unabhängigkeit: Die Ereignisse $\{1,2\}$ und $\{2,3\}$ sind definitionsgemäß genau dann unabhängig, wenn

$$\begin{aligned} & P(\{1,2\} \cap \{2,3\}) = P(\{1,2\}) \cdot P(\{2,3\}) \\ \iff \quad & P(\{2\}) = p_1 \cdot p_2 \\ \iff \quad & 1 - (P(\{1\}) + P(\{3\})) = p_1 \cdot p_2 \\ \iff \quad & 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \\ \iff \quad & 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \\ \iff \quad & 0 = \frac{1}{ab} \end{aligned}$$

gilt – also niemals.

Aufgabe 2. Man hat in dieser Aufgabe die Wahl, die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, bei der Modellierung zu berücksichtigen, oder nicht. (Die Wahl hat man deshalb, weil keines der betrachteten Ereignisse auf die Zugreihenfolge bezugnimmt – wenn sie es tun würden, wären wir gezwungen, die Reihenfolge bei der Modellierung zu berücksichtigen.) Wie so oft, ist das ein wenig die Wahl zwischen Pest und Cholera: Mit Beachtung der Reihenfolge ist die Angabe des Wahrscheinlichkeitsraumes einfacher, aber jedes betrachtete Ereignis besteht aus recht vielen Einzelergebnissen; ohne Beachtung der Reihenfolge sind die Ereignisse übersichtlicher, jedoch die Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsraumes komplizierter. Ich entscheide mich einmal für die erste, einmal für die zweite Möglichkeit.

a) Ich nehme für den Zug mit Zurücklegen den Ergebnisraum[1]

$$\Omega^{\text{mit}} := \{S, W, B\}^3 = \{(F_1, F_2, F_3) \mid F_i \in \{S, W, B\}\}.$$

Die Angabe von P^{mit} ist relativ einfach: Wenn wir mit $p_S := \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $p_W := \frac{3}{10}$ und $p_B := \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ die (in jedem Zug gleichen) Anteile von schwarzen, weißen bzw. roten Kugeln in der Urne bezeichnen, so haben wir für die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses

$$\begin{aligned} P^{\text{mit}}(\{F_1, F_2, F_3\}) &= p_{F_1} \cdot p_{F_2} \cdot p_{F_3} \\ &= p_S^{(\text{Anzahl der } i \text{ mit } F_i = S)} \cdot p_W^{(\text{Anzahl der } i \text{ mit } F_i = W)} \cdot p_B^{(\text{Anzahl der } i \text{ mit } F_i = B)}. \end{aligned}$$

(Begründen kann man diese Festlegung mit der die Unabhängigkeit der Züge und der Gleichheit der Voraussetzungen in jedem Zug; äquivalent formuliert: Man könnte den dreimaligen Zug durch ein Baumdiagramm modellieren, in dem von jedem Verzweigungspunkt drei Zweige S, B, R jeweils mit den konstanten Wahrscheinlichkeiten p_S, p_B, p_R abgehen.)

*

Eine einfache und (entgegen der Empfehlung in der Aufgabenstellung) baumdiagramm-freie Version der Modellierung des Ziehens *ohne* Zurücklegen erhält man durch den folgenden Trick: Wir denken uns die Kugeln von 1 bis 10 durchnummeriert, und es seien die Kugeln $1, \dots, 5$ blau, die Kugeln $6, 7, 8$ weiß und die Kugeln $9, 10$ schwarz. Dann kann man (die Reihenfolge vergessend)

$$\Omega^{\text{ohne}} := \{X \subset \{1, \dots, 10\} \mid |X| = 3\}$$

nehmen und hat für P^{ohne} einfach die Laplace-Verteilung auf Ω^{ohne}. – Selbstverständlich ist aber auch eine Lösung mittels Angabe eines (recht großen) Baumdiagramms möglich.

b) Das Ereignis A^{mit} besteht aus allen Permutationen der Ergebnisse (B, B, S) und (B, B, W). Jedes dieser Ergebnisse besitzt 3 Permutationen, und diese sind alle gleich wahrscheinlich. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} P^{\text{mit}}(A^{\text{mit}}) &= 3 \cdot p_B^2 \cdot p_S^1 + 3 \cdot p_B^2 \cdot p_W^1 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{8} = 0{,}375. \end{aligned}$$

Das Ereignis A^{ohne} besteht aus allen Ergebnissen, die genau zwei der Kugeln $1, \dots, 5$ enthalten. Nach den Resultaten aus der Vorlesung über die hypergeometrische Verteilung ergibt sich damit

$$P^{\text{ohne}}(A^{\text{mit}}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \cdot 5}{120} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417.$$

[1] Ich schreibe Farben mit Großbuchstaben; der Buchstabe F soll für eine variable Farbe stehen.

*

Das Ereignis B^{mit} besteht aus den Ergebnissen (B, B, B), (S, S, S) und (W, W, W), womit sich ergibt

$$P^{\text{mit}}(B^{\text{mit}}) = p_B^3 + p_S^3 + p_W^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{4}{125} = 0{,}16.$$

Das Ereignis B^{ohne} zerfällt in zwei disjunkte Teilereignisse „Alle drei Kugeln sind blau" und „Alle drei Kugeln sind weiß" (drei schwarze Kugeln treten nicht auf, weil wir ohne Zurücklegen ziehen). Damit ergibt sich

$$P^{\text{ohne}}(B^{\text{ohne}}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{0} + \binom{3}{3} \cdot \binom{7}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{120} = \frac{11}{120} \approx 0{,}092.$$

*

Das Ereignis C^{mit} besteht aus allen $3! = 6$ Permutationen des Ergebnisses (B, W, S), womit sich ergibt

$$P^{\text{mit}}(C^{\text{mit}}) = 6 \cdot p_B \cdot p_S \cdot p_W = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50} = 0{,}18.$$

Das Ereignis C^{ohne} besteht aus allen Erebnissen, die genau eine der Kugeln $1, \ldots, 5$, genau eine der Kugeln $6, 7, 8$ und eine der Kugeln $9, 10$ enthalten. Damit ergibt sich, analog zu den Überlegungen in der Vorlesung zur hypergeometrischen Verteilung,

$$P^{\text{ohne}}(C^{\text{ohne}}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{120} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

*

Das Ereignis D ist (egal in welchem Modell) das Gegenereignis von C, also ergibt sich

$$P^{\text{mit}}(D^{\text{mit}}) = 1 - P^{\text{mit}}(C^{\text{mit}}) = \frac{41}{50} = 0{,}82$$

sowie

$$P^{\text{ohne}}(D^{\text{ohne}}) = 1 - P^{\text{ohne}}(C^{\text{ohne}}) = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Aufgabe 3.

a) Es ist nicht notwendig, die Prüfer A und B voneinander zu unterscheiden: Man kann die Situation derart modellieren, daß die drei Studentinnen nacheinander (ohne Zurücklegen) jeweils eine Kugel aus einer Urne mit $3k$ Kugeln zieht, von denen k Kugeln schwarz sind (diese entsprechen den Prüfungsterminen bei Prüfer C) und $2k$ Kugeln weiß (diese entsprechen den Prüfungsterminen bei den beiden anderen Prüfern).

Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit P, also die Wahrscheinlichkeit, 3 schwarze Kugeln zu ziehen, nach der hypergeometrischen Verteilung:

$$P(k) = H(3, 3k, k)(\{3\}) = \frac{\binom{k}{3} \cdot \binom{2k}{0}}{\binom{3k}{3}} = \frac{\binom{k}{3}}{\binom{3k}{3}}.$$

b) Wir formen die in a) berechnete Wahrscheinlichkeit um durch Ausschreiben der Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} P(k) &= \binom{k}{3} \cdot \binom{3k}{3}^{-1} = \frac{k!}{3! \cdot (k-3)!} \cdot \frac{3! \cdot (3k-3)!}{(3k)!} \\ &= \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3k \cdot (3k-1) \cdot (3k-2)} = \frac{(k-1) \cdot (k-2)}{3 \cdot (3k-1) \cdot (3k-2)} \end{aligned}$$

Damit erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{k-1}{3k-1} \cdot \frac{k-2}{3k-2} < \frac{1}{3} \cdot \frac{k-\frac{1}{3}}{3k-1} \cdot \frac{k-\frac{2}{3}}{3k-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Um zu untersuchen, für welche $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung $P(k) \geq \frac{1}{30}$ gilt, formen wir folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} & P(k) \geq \frac{1}{30} \\ \iff \quad & 30 \cdot (k-1)(k-2) \geq 3 \cdot (3k-1) \cdot (3k-2) \\ \iff \quad & 10 \cdot (k^2 - 3k + 2) \geq 9k^2 - 9k + 2 \\ \iff \quad & k^2 - 21k + 18 \geq 0. \end{aligned}$$

Nun weiß man aus der Schule, daß der Graph der Funktion $k \mapsto k^2 - 21k + 18$ eine nach oben offene Parabel ist. Ihre Nullstellen sind

$$\frac{21 + \sqrt{369}}{2},$$

und deren Werte sind etwa $0{,}90$ und $20{,}1$. Zwischen den Nullstellen ist $k^2 - 21k + 18$ negativ; also ist $P(k) \geq \frac{1}{30}$ genau dann, wenn $k \geq 21$ ist.

Das Verhalten der Wahrscheinlichkeit $P(k)$ kann man mit dem Begriff des *Grenzwertes*, der uns in der Vorlesung noch nicht zur Verfügung steht, gut beschreiben: Wie in der Schule kann man rechnen

$$\lim_{k\to\infty} P(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1) \cdot (k-2)}{3 \cdot (3k-1) \cdot (3k-2)} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{k}) \cdot (1-\frac{2}{k})}{3 \cdot (3-\frac{1}{k}) \cdot (3-\frac{2}{k})} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{27}.$$

Wir sehen damit: Obwohl die Wahrscheinlichkeit immer $< \frac{1}{27}$ ist, nähert sie sich dieser Zahl aber für wachsendes k immer weiter an.

Gleichzeitig ist $\frac{1}{27}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß jede der drei Studentinnen bei Prüfer C landet, wenn *mit* Zurücklegen gezogen wird, also die Zahl der Prüfungstermine bei jedem Prüfer nicht nach oben beschränkt ist. Hieran sieht man: Ein Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit sehr vielen Kugeln (bei festem Anzahlverhältnis von schwarzen und weißen Kugeln) nähert sich dem Ziehen *mit* Zurücklegen an.

Aufgabe 4. Wir numerieren die Spieler als Andreas $= 1$, Barbara $= 2$ usw.

a) Es sei K die Menge aller Karten; wir benötigen nur die Information, daß $|K| = 32$ ist. Ein geeigneter Ergebnisraum Ω sollte aus allen disjunkten Zerlegungen der Menge K in vier achtelementige Teilmengen bestehen:

$$\Omega := \{(A_1, A_2, A_3, A_4) \mid A_i \subset K,\ |A_i| = 8,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j\}$$

Alle diese Verteilungen haben sicherlich die gleiche Wahrscheinlichkeit, so daß von der Laplace-Verteilung P auf Ω auszugehen ist. Um sie berechnen zu können, benötigen wir die Mächtigkeit von Ω: Es ist

$$\begin{aligned}|\Omega| &= \binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} = \frac{32 \cdot \ldots \cdot 25}{8!} \cdot \frac{24 \cdot \ldots \cdot 17}{8!} \cdot \frac{16 \cdot \ldots \cdot 9}{8!} \cdot \frac{8 \cdot \ldots \cdot 1}{8!} \\ &= \frac{32!}{8!^4} = 99.561.092.450.391.000 \quad \text{(fast eine Trillion!)}\end{aligned}$$

Die Darstellung von $|\Omega|$ als $32! \cdot 8!^{-4}$ ist ein Hinweis auf eine andere Möglichkeit der Berechnung von $|\Omega|$: Stellt man sich das Verteilen der 32 Karten so vor, daß alle Karten in einer Reihe angeordnet werden und der erste Spieler die ersten acht, der zweite die nächsten acht usw. nimmt, so gibt es insgesamt 32! mögliche Anordnungen der gesamten Reihe; da aber innerhalb der acht Karten jedes Spielers die Reihenfolge nicht relevant ist, muß diese Anzahl noch viermal durch 8! dividiert werden.

b) Da wir mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit rechnen, besteht die ganze Arbeit darin, die Mächtigkeiten der untersuchten Ereignisse zu bestimmen.

- Es sei A_i das Ereignis „Spieler i erhält ausschließlich Ober und Unter“, $i = 1, \ldots, 4$. Dann ist
$$|A_i| = \binom{8}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}.$$
für jedes i. Da aber $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ist, und diese Vereinigung disjunkt ist, folgt
$$|A| = 4 \cdot |A_1| = 4 \cdot \binom{8}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8},$$
und daraus ergibt sich
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 4 \cdot \binom{32}{8}^{-1} = \frac{1}{2.629.575} \approx 0{,}000000038.$$
Dieses Ereignis tritt also im Mittel bei ca. jedem zweieinhalbmillionsten Spiel ein.

  Die Formel für $P(A)$ kann man auch folgendermaßen einsehen: Für jeden einzelnen Spieler sind alle $\binom{32}{8}$ möglichen Kartenmengen gleich wahrscheinlich, und es gibt $\binom{4}{1} = 4$ Möglichkeiten, den „glücklichen“, der nur Ober und Unter bekommt, auszusuchen. Diese Argumentation verläßt allerdings das Modell des von uns gewählten Wahrscheinlichkeitsraumes.

- Für jede Kombination zweier Spielernummern $i \neq j$ sei $B_k^{(i,j)}$ das Ereignis „Die höchsten k Trumpfkarten sind alle bei den Spielern i und j“. Der Zusammenhang zwischen B_k und den Ereignissen $B_k^{(i,j)}$ ist nun leider nicht ganz unkompliziert, denn es gilt zwar natürlich
$$B_k = \bigcup_{i<j} B_k^{(i,j)} = B_k^{(1,2)} \cup B_k^{(1,3)} \cup B_k^{(1,4)} \cup B_k^{(2,3)} \cup B_k^{(2,4)} \cup B_k^{(3,4)},$$
diese Vereinigung ist jedoch nicht disjunkt! Bezeichnen wir nämlich mit $B_k^{(i)}$ das Ereignis „Die höchsten k Trumpfkarten sind alle bei Spieler i“, so gilt für paarweise verschiedene i, j, ℓ beispielsweise
$$B_k^{(i,j)} \cap B_k^{(i,\ell)} = B_k^{(i)}.$$
Die wohl einfachste Korrektur der Zählung ist die folgende: Wenn wir die Mächtigkeiten aller $B_k^{(i,j)}$ addieren, zählen wir all diejenigen Verteilungen mehrfach, die in einem $B_k^{(i)}$ liegen (bei denen also *ein* Spieler die k höchsten Trumpfkarten bekommen hat). Jede solche Verteilung

wird dabei genau dreimal gezählt (denn es gibt drei Kombinationen von i mit einer anderen Spielernummer j), muß also von der Summe doppelt abgezogen werden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}|B_k| &= \sum_{i<j} \left|B_k^{(i,j)}\right| - 2\sum_i \left|B_k^{(i)}\right| \\ &\overset{(*)}{=} \binom{4}{2} \left|B_k^{(3,4)}\right| - 2\binom{4}{1} \left|B_k^{(4)}\right| \\ &= 6\left|B_k^{(3,4)}\right| - 8\left|B_k^{(4)}\right|.\end{aligned}$$

(In Schritt $(*)$ haben wir verwendet, daß sicherlich alle $B_k^{(i,j)}$ gleich viele Ergebnisse enthalten, und ebenso alle $B_k^{(i)}$; wir können also irgendwelche *festen* Spielernummern nehmen, hier 3 und 4.)
Nun gilt

$$\left|B_k^{(3,4)}\right| = \binom{32-k}{8} \cdot \binom{24-k}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8},$$

wodurch sich

$$\begin{aligned}P(B_k^{(3,4)}) &= \frac{\left|B_k^{(3,4)}\right|}{|\Omega|} = \binom{32-k}{8} \cdot \binom{32}{8}^{-1} \cdot \binom{24-k}{8} \cdot \binom{24}{8}^{-1} \\ &= \frac{(32-k)\cdot(31-k)\cdot\ldots\cdot(25-k)}{32\cdot 31\cdot\ldots\cdot 25} \cdot \frac{(24-k)\cdot(23-k)\cdot\ldots\cdot(17-k)}{24\cdot 23\cdot\ldots\cdot 17} \\ &= \frac{16\cdot 15\cdot\ldots\cdot(17-k)}{32\cdot 31\cdot\ldots\cdot(33-k)}\end{aligned}$$

ergibt, und ebenso

$$\left|B_k^{(4)}\right| = \binom{32-k}{8} \cdot \binom{24-k}{8} \cdot \binom{16-k}{8} \cdot \binom{8}{8},$$

woraus

$$\begin{aligned}P(B_k^{(i)}) &= \frac{\left|B_k^{(4)}\right|}{|\Omega|} = \binom{32-k}{8} \cdot \binom{32}{8}^{-1} \cdot \binom{24-k}{8} \cdot \binom{24}{8}^{-1} \cdot \binom{16-k}{8} \cdot \binom{16}{8}^{-1} \\ &= \frac{(32-k)\cdot(31-k)\cdot\ldots\cdot(9-k)}{32\cdot 31\cdot\ldots\cdot 9} \\ &= \frac{8\cdot 7\cdot\ldots\cdot(9-k)}{32\cdot 31\cdot\ldots\cdot(33-k)}\end{aligned}$$

folgt. Dies bedeutet

$$P(B_k) = 6\cdot\frac{16\cdot 15\cdot\ldots\cdot(17-k)}{32\cdot 31\cdot\ldots\cdot(33-k)} - 8\cdot\frac{8\cdot 7\cdot\ldots\cdot(9-k)}{32\cdot 31\cdot\ldots\cdot(33-k)},$$

also

$$\begin{aligned}
P(B_3) &= 6 \cdot \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{32 \cdot 31 \cdot 30} - 8 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{32 \cdot 31 \cdot 30} \\
&= \frac{91}{155} \approx 0{,}59, \\
P(B_4) &= 6 \cdot \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} - 8 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \\
&= \frac{259}{899} \approx 0{,}29, \\
P(B_5) &= \ldots = \frac{115}{899} \approx 0{,}13, \\
P(B_6) &= \ldots = \frac{427}{8091} \approx 0{,}05, \\
P(B_7) &= \ldots = \frac{2143}{105183} \approx 0{,}02, \\
P(B_8) &= \ldots = \frac{19303}{2629575} \approx 0{,}007.
\end{aligned}$$

(Unsere Formel funktioniert auch für $k = 1$ und $k = 2$ und liefert, wie zu erwarten, $P(B_1) = P(B_2) = 1$, denn die beiden höchsten Trumpfkarten sind natürlich *immer* in den Händen von nur zwei Spielern; ebenso liefert sie für $k = 9, 10, \ldots$ korrekte Ergebnisse und auch für $k > 16$ – aber dann ist $P(B_k)$ selbstverständlich 0.)

Im Prinzip kann man die Wahrscheinlichkeit $P(B_k)$ auch auch mit der Formel von Sylvester für die Vereinigung von 6 Ereignissen berechnen. Diese zunächst schrecklich erscheinende Rechnung wird in dem Moment übersichtlicher, in dem man bemerkt, daß der Schnitt mehr als drei *verschiedenenen* Ereignissen der Form $B_k^{(i,j)}$ steets leer ist; am Ende ergibt sich das gleiche Resultat, das wir direkt hergeleitet haben: Von der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller sechs Ereignisse $B_k^{(i,j)}$ ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller vier Ereignisse $B_k^{(i)}$ doppelt abzuziehen.

c) Es sei S das Ereignis „Daniel besitzt das Schellen- und Herz-As, jedoch kein weiteres", und für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ sei T_i das Ereignis „Spieler i besitzt das Gras- und das Eichel-As", sowie $T := T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Dann ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $P_S(T)$.

Es ist

$$|S| = \binom{30}{8} \cdot \binom{22}{8} \cdot \binom{14}{8} \cdot \binom{6}{6}$$

sowie

$$|T \cap S| = \sum_{i=1}^{3} |T_i \cap S| = 3 \cdot |T_1 \cap S| = 3 \cdot \binom{28}{6} \cdot \binom{22}{8} \cdot \binom{14}{8} \cdot \binom{6}{6}$$

und damit

$$\begin{aligned}
P_S(T) &= \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = \frac{|T \cap S| \,/\, |\Omega|}{|S| \,/\, |\Omega|} = \frac{|T \cap S|}{|S|} \\
&= 3 \cdot \binom{28}{6} \cdot \binom{30}{8}^{-1} = 3 \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 23}{6!} \cdot \frac{8!}{30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 23} \\
&= 3 \cdot \frac{7 \cdot 8}{30 \cdot 29} = \frac{28}{145} \approx 0{,}19.
\end{aligned}$$

Es ist also mit ca. 80prozentiger Wahrscheinlichkeit davon auszugehen, daß die beiden übrigen Asse auf zwei *verschiedene* Mitspieler von Daniel verteilt sind.

d) Hier bietet sich ein Ansatz über das Gegenereignis an: Sei diesmal S das Ereignis „Daniel hat das Herz-As, jedoch kein weiteres“, und T das Ereignis „Irgendein anderer Spieler hat mindestens zwei Asse“. Dann ist

$$S \setminus T = S \cap \overline{T} = \text{„Jeder Spieler hat genau ein As, im Falle Daniels das Herz-As“}.$$

Damit ergibt sich (da es 3! Möglichkeiten gibt, die übrigen Asse auf die drei Mitspieler Daniels zu verteilen)

$$|S \setminus T| = 3! \cdot \binom{28}{7} \cdot \binom{21}{7} \cdot \binom{14}{7} \cdot \binom{7}{7}$$

sowie

$$|S| = \binom{31}{8} \cdot \binom{23}{8} \cdot \binom{15}{8} \cdot \binom{7}{7}.$$

Damit erhalten wir[2]

$$\begin{aligned} P_S(T) &= \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{P(S \setminus (S \cap \overline{T}))}{P(S)} = \frac{P(S) - P(S \cap \overline{T})}{P(S)} = 1 - \frac{P(S \setminus T)}{P(S)} \\ &= 1 - \frac{|S \setminus T|}{|S|} \\ &= 1 - 3! \cdot \underbrace{\binom{28}{7} \cdot \binom{31}{8}^{-1}} \cdot \underbrace{\binom{21}{7} \cdot \binom{23}{8}^{-1}} \cdot \underbrace{\binom{14}{7} \cdot \binom{15}{8}^{-1}} \\ &= 1 - 6 \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 22 \cdot 8!}{7! \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 24} \cdot \frac{21 \cdot 20 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot 8!}{7! \cdot 23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 16} \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 8!}{7! \cdot 15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 8} \\ &= 1 - 6 \cdot \frac{8^3}{31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{3983}{4495} \approx 0{,}89. \end{aligned}$$

Es ist also mit fast 90prozentiger Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, daß irgendeiner der drei Mitspieler (im Falle eines „Wenzes“: der drei Gegenspieler!) Daniels mehr als ein As auf der Hand hat.

[2] Die erste Zeile der Rechnung kann man auch einfacher folgendermaßen formulieren, wenn man verwendet, daß P_S eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\Omega' := S$ ist: Dann ist

$$P_S(T) = 1 - P_S(S \setminus T) = 1 - \frac{P(S \setminus T)}{P(S)}.$$