Mathematisches Institut der Universität München Daniel Rost
Sommersemester 2014 Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Brüche und Primfaktorzerlegungen).

a) Es seien $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a_0, a_2 \neq 0$. Man zeige: Ist x eine Lösung der Gleichung

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 \overset{!}{=} 0,$$

und gilt $x \in \mathbb{Q}$, so läßt sich x schreiben als $x = \frac{z}{n}$ mit $z \mid a_0$ und $n \mid a_2$.

(Anleitung: Man schreibe x als gekürzten Bruch, $x = \frac{z}{n}$, zeige $n \mid a_2z^2$ und $z \mid a_0n^2$ und folgere die behaupteten Teilbarkeitsbeziehungen.)

b) Man formuliere und beweise eine Verallgemeinerung der Aussage aus a) für Gleichungen der Form $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \overset{!}{=} 0$ oder allgemein $a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1x + a_0 \overset{!}{=} 0$.

Aufgabe 2 (Rationale Lösungen von Polynomgleichungen). Man bestimme (unter Verwendung von Aufgabe 2 vom 7. Tutoriumsblatt bzw. von Aufgabe 1) sämtliche rationalen Lösungen für jede der folgenden Gleichungen:

a) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 \overset{!}{=} 0$.

b) $15x^2 - 31x + 10 \overset{!}{=} 0$.

c) $30x^3 + 11x^2 - 4x - 1 \overset{!}{=} 0$.

Aufgabe 3 (Supremum und Infimum I). Man untersuche die Menge

$$M := \left\{ \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\} \subset \mathbb{R}$$

auf Beschränktheit (nach oben bzw. unten) und bestimme, sofern sie existieren, Supremum und Infimum. Handelt es sich jeweils sogar um ein Maximum bzw. Minimum?

Aufgabe 4 (Supremum und Infimum II). Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ ist die *Summe* definiert als

$$A + B := \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

a) Man zeige: Sind A und B *endlich*, so gilt für die Mächtigkeit von $A + B$ die Abschätzung $|A + B| \leq |A| \cdot |B|$.

b) Man zeige, daß für die Summe von *Intervallen* die Regel $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$ gilt (wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$ seien).

(Anleitung: Man zeige „$\subset$“ und „$\supset$“ getrennt. Für „$\supset$“ kann man z.B. zeigen, daß sowohl jedes Element von $[a + c, b + c]$ als auch jedes Element von $[b + c, b + d]$ in $[a, b] + [c, d]$ liegt.)

c) Man zeige: Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so ist auch $A + B$ nach oben beschränkt, und es gilt $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(Hinweis: Man zeige zunächst, daß $\sup A + \sup B$ eine obere Schranke für $A + B$ ist. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ untersuche man dann Elemente $x \in A$ und $y \in B$ mit $x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ und $y > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$.)

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 13. Juni 2014, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!