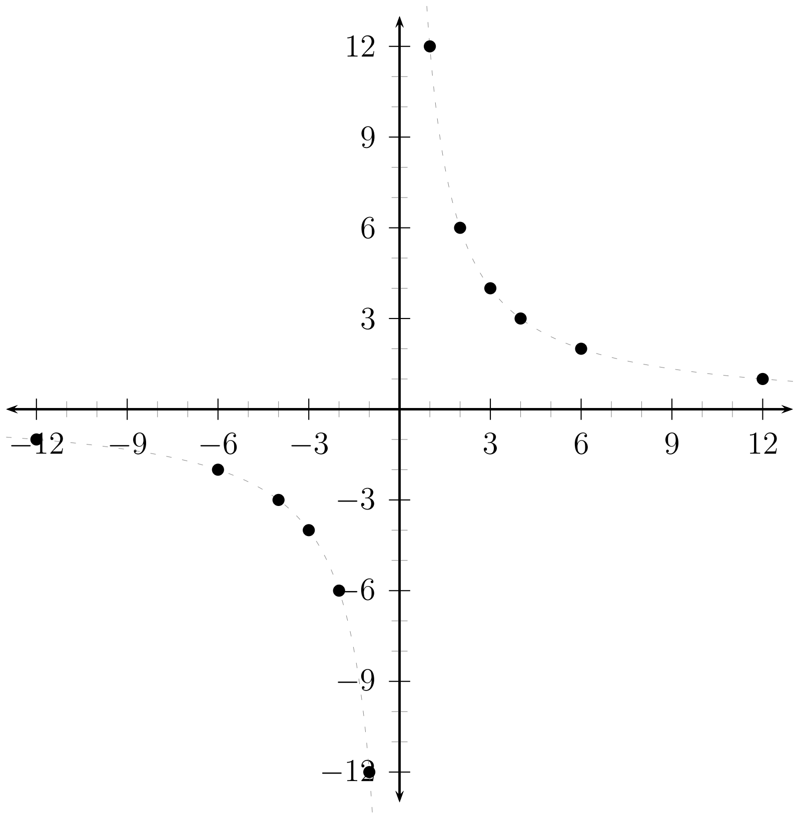
Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

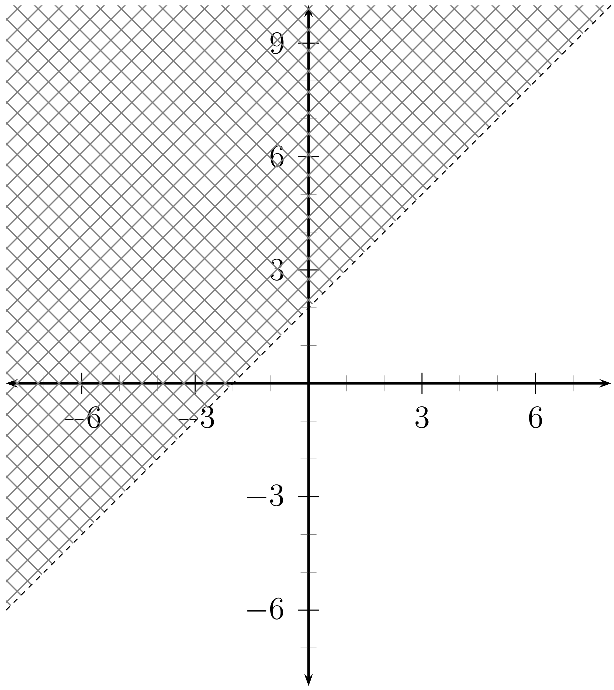
Aufgabe 1.

a) Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \cdot y = 12$, so gilt insbesondere $x \mid 12$. Es kommen also für x (und ebenso für y) nur die ganzzahligen Teiler von 12, also $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ in Frage, so daß R_1 aus endlich vielen Punkten besteht:



Alle diese Punkte liegen auf einer gemeinsamen (zweiteiligen) Kurve, nämlich der Menge aller Paare $(x, y) \underline{\in \mathbb{R}}$ mit $x \cdot y = 12$. Dies ist einfach der Graph der Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{12}{x}$. Er ist in unserer Abbildung gestrichelt eingezeichnet; für die gestellte Aufgabe hat er jedoch eigentlich keine Bedeutung.

b) Für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt genau dann $(x, y) \in R_2$, wenn $y > x + 2$ ist, wenn also der Punkt (x, y) *(strikt) oberhalb* des Graphen der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 2$ liegt. Damit ist R_2 eine sozusagen „nordwestlich" liegende Halbebene; ein endlicher Ausschnitt ist in der folgenden Abbildung eingezeichnet:



Aufgabe 2. Hier gibt es jeweils mehrere Möglichkeiten; die hier angegebenen Lösungen versuchen mit möglichst wenig Schreibaufwand auszukommen, sind aber beileibe nicht alternativlos.

a) Eine Möglichkeit wäre die Relation $R = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (1,2),\ (2,3)\}$. Sie ist reflexiv, jedoch nicht symmetrisch (es gilt zwar $1 \sim 2$, jedoch $2 \not\sim 1$) und nicht transitiv (denn es gilt $1 \sim 2$ und $2 \sim 3$, jedoch $1 \not\sim 3$).

b) Hier kann man beispielsweise die Relation „$\neq$“ verwenden: Sie ist offensichtlich symmetrisch, nicht reflexiv (denn es gilt niemals $x \neq x$) und nicht transitiv (denn es gilt $1 \neq 2$ und $2 \neq 1$, jedoch nicht $1 \neq 1$).

c) Hierfür leistet die altbekannte Relation „$<$“ gute Dienste, die bekanntlich transitiv, aber offensichtlich weder symmetrisch noch reflexiv ist.

Aufgabe 3.

a) Die Relation R_1 ist nach Definition **reflexiv**; sie ist **nicht symmetrisch** (es ist $1 \sim 4$ wegen $1+3 \leq 4$, jedoch $4 \not\sim 1$ wegen $4+3 \not\leq 1$). Sie ist **antisymmetrisch**, denn sind $x, y \in \mathbb{Z}$ gegeben mit $x \sim y$ und $y \sim x$, und ist $x \neq y$, so folgt $x+3 \leq y$ und $y+3 \leq x$, also $x \leq y-3$ und $y \leq x-3$ und zusammen $x \leq y-3 \leq (x-3)-3 = x-6$, woraus $0 \leq -6$ folgt, Widerspruch. Die Relation ist **transitiv**, denn aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt (sofern nicht $x = y$ oder $y = z$ ist, in welchem Fall automatisch auch $x \sim z$ folgt) $x+3 \leq y$ und $y+3 \leq z$, also zusammen $x+3 \leq y < y+3 \leq z$, also insgesamt $x \sim z$. Insgesamt ist R_1 also eine **Ordnung** auf $\mathbb{Z}$, jedoch (auch wenn danach nicht gefragt war) **keine Totalordnung** (denn es gilt weder $1 \sim 2$ noch $2 \sim 1$).

b) Die Relation R_2 ist **reflexiv** (denn $|x-x| = 0 \leq 3$) und **symmetrisch** (dies folgt im Wesentlichen aus $|x-y| = |y-x|$; genauer: Ist $|x-y| \leq 3$, so ist auch $|y-x| = |x-y| \leq 3$). Sie ist **nicht antisymmetrisch** (denn es ist $1 \sim 2$ und $2 \sim 1$, aber $1 \neq 2$) und **nicht transitiv** (denn es ist $1 \sim 3$ und $3 \sim 5$, jedoch $1 \not\sim 5$).

Insgesamt ist R_2 also weder eine Ordnung noch eine Äquivalenzrelation.

Für die Anschauung: Nach Definition von R_2 bedeutet $x \sim y$ so etwas wie „x liegt nahe genug bei y“. In dieser Formulierung ahnt man sofort Symmetrie und Reflexivität, fehlende Antisymmetrie bei genügend dicht liegenden Elementen und fehlende Transitivität.

Aufgabe 4.

a) Es gilt

$$\begin{aligned} & R_f \text{ ist reflexiv} \\ \iff & \forall x \in M \quad x \sim x \\ \iff & \forall x \in M : x = f(x) \\ \iff & f = \mathrm{id}_M \,. \end{aligned}$$

b) Angenommen, R_f ist symmetrisch. Behauptet wird $f \circ f = \mathrm{id}$, also $f(f(x)) = x$ für alle $x \in M$. Aber nach Definition von R_f gilt $x \sim f(x)$ für jedes $x \in M$, und aufgrund der Symmetrie folgt $f(x) \sim x$, also $f(f(x)) = x$, was zu beweisen war.

Angenommen, es ist $f \circ f = \mathrm{id}$. Zu zeigen ist, daß R_f symmetrisch ist. Seien also $x, y \in M$ mit $x \sim y$. Nach Definition von R_f bedeutet das $y = f(x)$. Dann ist aber $f(y) = f(f(x)) = x$ wegen $f \circ f = \mathrm{id}$, also $y \sim x$, und dies beweist die Symmetrie von R_f.

c) Angenommen, R_f ist transitiv. Behauptet wird $f \circ f = f$, also $f(f(x)) = f(x)$ für alle $x \in M$. Nach Definition von R_f gilt $x \sim f(x)$ und $f(x) \sim f(f(x))$ für alle $x \in M$. Aufgrund der Transitivität folgt daraus $x \sim f(f(x))$, und nach Definition von R_f heißt das $f(x) = f(f(x))$, was zu beweisen war.

Angenommen, es ist $f \circ f = f$. Zu zeigen ist, daß R_f transitiv ist. Seien also $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Nach Definition von R_f bedeutet dies $y = f(x)$ und $z = f(y)$. Daraus folgt aber $z = f(f(x)) = f(x)$ wegen $f \circ f = f$, also $x \sim z$, und dies Beweist die Transitivität von R_f.