Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Das Monty-Hall-Problem einmal anders) Hinter drei verschlossenen Türen befinden sich zufällig verteilt ein Auto, die Autoschlüssel und eine Niete. Es gibt zwei Spieler: Spieler A muß das Auto finden, Spieler B die Autoschlüssel. Nur wenn beide Spieler erfolgreich sind, dürfen sie mit dem Auto nach Hause fahren. Zunächst betritt Spieler A den Raum und darf nacheinander zwei der drei Türen öffnen. Hat er das Auto nicht gefunden, haben beide Spieler verloren; ist er dagegen erfolgreich, werden die Türen wieder geschlossen, und Spieler B betritt den Raum. Er darf nun ebenfalls zwei der drei Türen öffnen, kann allerdings in keiner Weise mit Spieler A kommunizieren.

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß die Spieler Auto und Autoschlüssel finden, wenn beide die von ihnen zu öffnenden Türen rein zufällig auswählen.

b) Man berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn die Spieler sich an die folgende Strategie halten:

> Spieler A öffnet zuerst Tür 1. Befindet sich hinter ihr das Auto, so ist er erfolgreich. Befinden sich hinter Tür 1 die Schlüssel, so öffnet er als nächstes Tür 2; befindet sich hinter Tür 1 die Niete, so öffnet er als nächstes Tür 3.
>
> Spieler B öffnet zuerst Tür 2. Befinden sich hinter ihr die Schlüssel, so ist er erfolgreich. Befindet sich hinter Tür 2 die Niete, so öffnet er als nächstes Tür 3; befindet sich hinter Tür 2 das Auto, so öffnet er als nächstes Tür 1.

Aufgabe 2 (Fußball-Weltmeisterschaft II) Bei der Fernsehübertragung eines Viertelfinalspiels aus Brasilien tritt mit 5% Wahrscheinlichkeit eine Bildstörung auf. Ist das Bild gestört, so zu 60% auch der Ton; ist das Bild einwandfrei, so zu 90% auch der Ton.

a) Man stelle eine Vierfeldertafel für die Ereignisse B : „Bildstörung während der Übertragung“ und T : „Tonstörung während der Übertragung“ auf.

b) Sind die Ereignisse B und T unabhängig?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei einer Tonstörung das Bild einwandfrei?

d) Liegt keine Bildstörung vor, so schalten höchstens 20% der Zuschauer während der Übertragung aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit höchstens, daß ein Zuschauer während der Übertragung ausschaltet?

Aufgabe 3 (Unabhängigkeit von Ereignissen)

a) Man beweise: Ist (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subset \Omega$ Ereignisse, so gilt

$$A, B \text{ unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{A} \cap B).$$

b) Man gebe einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und drei Ereignisse $A, B, C \subset \Omega$ an mit den Eigenschaften:

(i) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

(ii) A, B, C sind nicht unabhängig.

c) Man gebe einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und drei Ereignisse $A, B, C \subset \Omega$ an mit den Eigenschaften:

(i) A, B, C sind paarweise unabhängig, d.h. es gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C).$$

(ii) A, B, C sind nicht unabhängig.

Aufgabe 4 (Flüsterpost) Durch einen absichtlichen Fehler wird bei der Übertragung einer Nachricht mit einer Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ das Gegenteil der eigentlich gemeinten Nachricht übermittelt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt in den Fällen $p = 0{,}2$ und $p = 0{,}8$ die Nachricht bei einer Kette von $n = 6$ bzw. $n = 7$ unabhängigen Übertragungen korrekt an?

b) Die Nachricht wird nun allgemein n-mal unabhängig übertragen mit $n \geq 2$. Man zeige, daß die Nachricht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\overline{p} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i}$$

korrekt ankommt; dabei ist $q := 1 - p$, und k ist die größte natürliche Zahl mit $2k \leq n$.

c) Man wende den binomischen Lehrsatz auf $(q + p)^n$ und $(q - p)^n$ an und zeige damit

$$\overline{p} = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}.$$

d) Man interpretiere den Zusammenhang zwischen p und $\overline{p}$.

(Dabei lohnt es sich, die Fälle, daß n gerade bzw. ungerade ist, getrennt zu untersuchen!)

Keine Abgabe und Korrektur! Lösungsvorschläge werden auf der Vorlesungshomepage veröffentlicht.