Mathematisches Institut der Universität München | Daniel Rost
Sommersemester 2014 | Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 9. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Es bietet sich $\Omega = \{(a,b) \mid a,b \in \{1,\ldots,20\} \text{ mit } a \neq b\}$ an. Auf dieser Menge bietet sich die Gleichverteilung (Laplace-Wahrscheinlichkeit) an, denn jede Kombination von erster und zweiter gezogener Zahl ist gleich wahrscheinlich.[1] Wegen $|\Omega| = 20 \cdot 19 = 380$ ist damit $P(\{(a,b)\}) = \frac{1}{380}$ für alle $a \neq b$.

Ebenso wäre es möglich, die Reihenfolge der gezogenen Enten zu vergessen und anstatt Paaren (a,b) Mengen $\{a,b\}$ zu verwenden. Das würde zu

$$\Omega' := \{A \subset \{1,\ldots,20\} \mid |A| = 2\}$$

führen. Als Wahrscheinlichkeitsverteilung würde sich immer noch die Laplace-Verteilung anbieten; wegen $|\Omega'| = \binom{20}{2} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 19 = 190$ wäre dann $P'(\{\{a,b\}\}) = \frac{1}{190}$ für alle $a,b \in \{1,\ldots,20\}$ mit $a \neq b$.

b) Wir bleiben beim zuerst beschriebenen Modell: Dann ist

$$A = \{(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1)\}$$

und $P(A) = |A| \cdot \frac{1}{380} = \frac{8}{380} \approx 0,021$.

c) Nein! Beispielsweise ist der Summenwert 3 nur durch die Ergebnisse $(1,2)$ und $(2,1)$ möglich, so daß seine Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{380} \approx 0,005$ ist.

(Wer findet eine Formel für die Wahrscheinlichkeit eines *beliebigen* Summenwertes k?)

Aufgabe 2. Je nachdem, ob mit oder ohne Wiederholung gezogen wird, bietet sich jeweils der Ergebnisraum

$$\Omega^{\text{mit}} := \{A,\ldots,Z\}^5 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \mid \forall i : a_i \in \{A,\ldots,Z\}\}$$

bzw.

$$\Omega^{\text{ohne}} := \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \mid \forall i : a_i \in \{A,\ldots,Z\}, a_1,\ldots,a_5 \text{ paarweise verschieden}\}$$

an. (Dabei gilt $\Omega^{\text{ohne}} \subset \Omega^{\text{mit}}$.) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist jeweils als Laplace-Verteilung anzunehmen (mit einer ähnlichen Begründung, wie sie in der Fußnote zu Aufgabe 1 gegeben wurde), so daß uns nur die Mächtigkeiten interessieren: Es ist

$$\left|\Omega^{\text{mit}}\right| = 26^5 = 11.881.376$$

und

$$\left|\Omega^{\text{ohne}}\right| = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7.893.600.$$

(Man kann $\left|\Omega^{\text{ohne}}\right|$ auch als $\binom{26}{5} \cdot 5!$ berechnen, natürlich mit dem gleichen Resultat.)

[1] Zur Begründung der Wahl der Laplace-Wahrscheinlichkeit kann man etwa mit einem Baumdiagramm argumentieren (das man aber aufgrund seiner Größe – er besitzt 380 Pfade! – besser nicht konkret hinschreiben sollte): Wenn man sich das Angeln zweier Enten als zweistufiges Zufallsexperiment vorstellt, hat sicherlich für die Zahl der *ersten* gezogenen Ente jede der Zahlen $1,2,\ldots,20$ die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$. Für die Zahl der *zweiten* Ente sind nun die verbliebenen 19 Zahlen alle gleich wahrscheinlich, d.h. jede hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{19}$. Insgesamt hat damit nach der 1. Pfadregel jeder Pfad durch den Baum die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{380}$.

a) Das Ereignis A besteht nur aus einem einzigen Ergebnis, ist also ein Elementarereignis. Damit ist

$$P^{\text{mit}}(A) = \frac{1}{11.881.376} \approx 0{,}000000084$$

und

$$P^{\text{ohne}}(A) = \frac{1}{7.893.600} \approx 0{,}000000127.$$

b) Das Ereignis B ist, je nach Fall, durch *verschiedene* Mengen beschrieben, denn beispielsweise liegt das Ergebnis (A, E, A, E, A) in B^{mit}, jedoch nicht in B^{ohne}.

Für die Mächtigkeiten ergibt sich (da es fünf verschiedene Vokale gibt)

$$\left|B^{\text{mit}}\right| = 5^5 = 3.125$$

und

$$\left|B^{\text{ohne}}\right| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120,$$

woraus sich

$$P^{\text{mit}}(B^{\text{mit}}) = \frac{3.125}{11.881.376} \approx 0{,}000263$$

und

$$P^{\text{ohne}}(A) = \frac{120}{7.893.600} \approx 0{,}000015$$

ergibt.

c) Das Ereignis C ist am einfachsten über sein Gegenereignis

$$\overline{C} : \text{„Das Wort enthält kein } A\text{“}$$

zu beschreiben. Für dieses ist das Vorgehen nämlich identisch zu demjenigen in b), nur daß wir statt der Menge $\{A, E, I, O, U\}$ der Vokale nun die Menge $\{B, C, \ldots, Z\}$ der „erlaubten“ Buchstaben betrachten. Damit ergibt sich

$$\left|\overline{C^{\text{mit}}}\right| = 25^5 = 9.765.625$$

und

$$\left|\overline{C^{\text{ohne}}}\right| = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 6.375.600,$$

woraus sich

$$P(C^{\text{mit}}) = 1 - P(\overline{C^{\text{mit}}}) = 1 - \frac{25^5}{26^5} \approx 0{,}178$$

und

$$P(C^{\text{ohne}}) = 1 - P(\overline{C^{\text{ohne}}}) = 1 - \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22} = 1 - \frac{21}{26} = \frac{5}{26} \approx 0{,}192$$

ergibt.

Aufgabe 3. Man hat nur dann eine Chance, gleich viele rote wie schwarze Kugeln zu ziehen, wenn man *geradzahlig viele* Kugeln zieht; es sind also nur die Fälle $k \in \{2, 4, 6\}$ interessant, und wir wollen dann jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, beim Ziehen von k Kugeln genau $\frac{1}{2}k$ schwarze Kugeln zu erwischen. Dies leistet die *Hypergeometrische Verteilung* aus der Vorlesung, genauer die Wahrscheinlichkeitsverteilung $H(k, 7, 4)$: Denn $H(n, N, S)$ beschreibt das Ziehen von n Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, und $H(n, N, S)(\{\ell\})$ ist die Wahrscheinlichkeit, genau ℓ schwarze Kugeln zu erwischen.
Unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also, in Abhängigkeit von k,

$$H(k, 7, 4)(\{\frac{k}{2}\}) = \frac{\binom{4}{\frac{1}{2}k} \cdot \binom{3}{\frac{1}{2}k}}{\binom{7}{k}}.$$

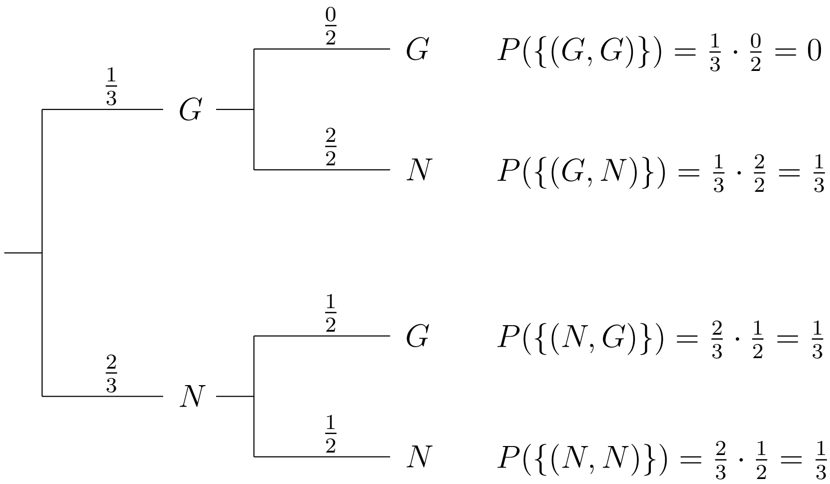
Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\ldots \text{für } k = 2\text{:} \quad & \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \approx 0{,}571, \\
\ldots \text{für } k = 4\text{:} \quad & \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{7}{4}} = \frac{6 \cdot 3}{35} = \frac{18}{35} \approx 0{,}514, \\
\ldots \text{für } k = 6\text{:} \quad & \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{7}{6}} = \frac{4 \cdot 1}{7} = \frac{4}{7} \approx 0{,}571.
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind also gleich (und am größten) für $k = 2$ und $k = 6$, aber der Unterschied in der Wahrscheinlichkeit zum Fall $k = 4$ ist nicht sonderlich groß.

Aufgabe 4.

a) Wir modellieren das Geschehen durch ein zweistufiges Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{(N, N), (G, N), (N, G), (G, G)\}$. Dabei steht in einem Paar wie (N, G) der erste Buchstabe (hier N) für die Wahl des Spielers A (er wählt eine **G**ewinntür oder eine **N**ietentür), der zweite Buchstabe (hier G) für die Wahl des Spielers B. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich anhand des folgenden Baumdiagramms:



Hier steht die linke Spalte für die Wahl des Spielers A, die rechte Spalte für die des Spielers B. Der oberste Pfad ist unmöglich (wenn A bereits die Gewinntür erwischt hat, kann B nur noch eine Niete auswählen!)

Verfolgt Spieler A die Strategie „Bleibe bei der ursprünglichen Wahl“, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß er eine Gewinntür erwischt hat, natürlich $\frac{1}{3}$; formal ergibt sich das anhand der Rechnung

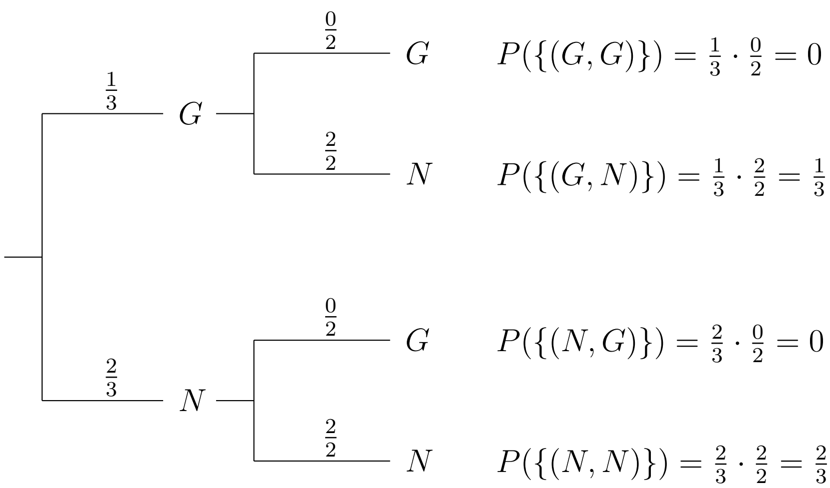
$$\begin{aligned} P(\text{„}A \text{ hat zu Beginn die Gewinntür gewählt“}) &= P(\{(G,?)\}) = P(\{(G,N),(G,G)\}) \\ &= P(\{(G,N)\}) + P(\{(G,G)\}) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Verfolgt Spieler A dagegen die Strategie „Wechsle zur verbleibenden Tür“, so erwischt er damit genau dann die Gewinntür, wenn die ursprünglichen Wahlen von A und B das Muster (N, N) ergaben (denn nur dann ist die dritte Tür G). Das bedeutet

$$P(\text{„}A \text{ hat nach Wechseln die Gewinntür erwischt“}) = P(\{(N,N)\}) = \frac{1}{3}.$$

Auch bei dieser Strategie beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit für A also $\frac{1}{3}$.

b) Hier ändert sich die Situation insofern, als der Moderator, der die Rolle von Spieler B übernimmt, *niemals* die Gewinntür öffnet! Damit ergibt sich das folgende modifizierte Baumdiagramm:



Im Fall der Strategie „Bleiben“ ergibt sich wie vorher

$$\begin{aligned} P(\text{„}A \text{ hat zu Beginn die Gewinntür gewählt“}) &= P(\{(G,?)\}) = P(\{(G,N),(G,G)\}) \\ &= P(\{(G,N)\}) + P(\{(G,G)\}) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

im Fall der Strategie „Wechseln“ jedoch

$$P(\text{„}A \text{ hat nach Wechseln die Gewinntür erwischt“}) = P(\{(N,N)\}) = \frac{2}{3}$$

(denn Wechseln führt nun immer dann zum Sieg, wenn Kandidat A zu Beginn eine Nietentür gewählt hat).

c) Während Kandidat B blind raten muß, hat der Moderator die Information, hinter welcher Tür der Gewinn liegt, und sie beeinflußt auch seine Wahl (nämlich in dem Fall, in dem A zuerst eine Niete gewählt hat). Diese zusätzliche Information kann A sich zunutze machen, indem er auf die Entscheidung des Moderators reagiert und die Tür wechselt. (Anders formuliert: Dadurch, daß der Moderator eine bestimmte Tür *nicht* öffnet, verrät er – zumindest mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit! – etwas über diese Tür. Noch deutlicher wird das in einer bekannten Variante dieses Spiels, bei dem es nicht drei, sondern eine Million Türen gibt, und hinter einer einzigen verbirgt sich ein Gewinn. Nachdem nun A sich für eine der Türen entschieden hat, öffnet der Moderator 999.998 weitere Nieten-Türen und läßt eine einzige verschlossen. Hier ist leicht nachzuvollziehen, daß sich hinter der einen ausgelassenen Tür eher der Gewinn verbirgt als hinter der ursprünglich von A gewählten.)