Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 8. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Stimmt. (Nach Definition ist ein Ereignis ein Element von $\mathcal{P}(\Omega)$, also eine Teilmenge von Ω, und die Elemente von Ω heißen nach Definition Ergebnisse.)

b) Falsch (die Elemente von Ω heißen Ergebnisse).

c) Falsch (der Ereignisraum ist die Menge *aller* (zulässigen) Ereignisse, also eine Menge von Teilmengen von Ω – in unserem Modell sogar immer die Menge *aller* Teilmengen von Ω, d.h. $\mathcal{P}(\Omega)$).

d) Falsch (die Elemente von Ω sind Ergebnisse, die Elemente des Ereignisraumes sind Ereignisse: also kann Ω keine Teilmenge des Ereignisraumes sein; andere Begründung: Ω ist ein *Element* des Ereignisraumes, keine *Teilmenge*).

e) Stimmt (das „sichere" Ereignis, das immer eintritt).

f) Falsch (Ergebnisse sind *Elemente* von Ω, nicht *Teilmengen* von Ω).

Aufgabe 2.

a) Man erhält die Liste

$$\begin{aligned}A = \{&(1,1,1),(1,1,2),\dots,(1,1,6),\\ &(1,2,1),(1,3,1),\dots,(1,6,1),\\ &(2,1,1),(3,1,1),\dots,(6,1,1)\}.\end{aligned}$$

b) Für ein Ergebnis (a,b,c) kann nur dann $a+b+c>16$ gelten, wenn a,b,c alle in $\{5,6\}$ liegen: Denn ansonsten wäre das größtmögliche Resultat $6+6+4=16$. Außerdem müssen mindestens zwei Sechser dabei sein, denn sonst ist die Summe höchstens $5+5+6=16$. Also ergibt sich

$$B = \{(6,6,6),(6,6,5),(6,5,6),(5,6,6)\}.$$

(Alternative Begründung: Die größtmögliche Augensumme ist 18, und damit das Ereignis B eintritt, darf die Augensumme höchstens um 1 kleiner sein als diese Zahl. Also kann vom Ergebnis $(6,6,6)$, das als einziges die Augensumme 18 liefert, höchstens ein Wert um höchstens eins reduziert werden.)

c) Es ist $45 = 3\cdot 3\cdot 5$, und aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist dies die einzige Möglichkeit, 45 als Produkt dreier Zahlen zwischen 1 und 6 zu schreiben. Also ist

$$C = \{(3,3,5),(3,5,3),(5,3,3)\}.$$

Aufgabe 3. Der Trick ist, aus einer Vereinigung *dreier* Mengen durch Setzen von Klammern eine Vereinigung von nur noch *zwei* Mengen zu machen, also etwa $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$ zu klammern. Dann kann man die Formel aus der Vorlesung anwenden:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \\
&= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&= \Big(P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)\Big) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - \Big(P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) \\
&\qquad - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3))\Big) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
&\qquad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

a) Es ist

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{(0,0,0)\}, \\
A_1 &= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}, \\
A_2 &= \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}, \\
A_3 &= \{(1,1,1)\}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Regel, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse ist, ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
P(A_0) &= P(\{(0,0,0)\}) = p^0 \cdot (1-p)^3 \\
&= (1-p)^3, \\
P(A_1) &= P(\{(1,0,0)\}) + P(\{(0,1,0)\}) + P(\{(0,0,1)\}) \\
&= p^1 \cdot (1-p)^2 + p^1 \cdot (1-p)^2 + p^1 \cdot (1-p)^2 \\
&= 3p(1-p)^2, \\
P(A_2) &= P(\{(0,1,1)\}) + P(\{(1,0,1)\}) + P(\{(1,1,0)\}) \\
&= p^2 \cdot (1-p)^1 + p^2 \cdot (1-p)^1 + p^2 \cdot (1-p)^1 \\
&= 3p^2(1-p), \\
P(A_3) &= P(\{(1,1,1)\}) = p^3 \cdot (1-p)^0 \\
&= p^3.
\end{aligned}$$

Hier bietet sich ein Konsistenzcheck an: Es ist $\Omega = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ (disjunkte Vereinigung), also muß die Summe unserer berechneten Wahrscheinlichkeiten 1 sein. Und in der Tat ist nach der Binomischen Formel

$$(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) + p^3 = ((1-p)+p)^3 = 1^3 = 1.$$

b) Das Ereignis A_k besteht aus allen Ergebnissen $(x_1, \ldots, x_n)$, bei denen genau k der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ den Wert 1 haben und die übrigen den Wert 0. Jedes für jedes dieser Ergebnisse gilt aufgrund der Definition von P

$$P(\{(x_1, \ldots, x_n)\} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Da es außerdem genau $\binom{n}{k}$ solcher Ergebnisse gibt, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
P(A_k) &= \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n) \\ \text{genau } k \text{ der } x_i \text{ sind } = 1}} P(\{(x_1,\dots,x_n)\}) \\
&= \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n) \\ \text{genau } k \text{ der } x_i \text{ sind } = 1}} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Diese Ausdrücke sind schon aus der Vorlesung bekannt, nämlich als „Binomialverteilung“. Wir haben also gezeigt: In einer Bernoullikette der Länge n mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ist die Anzahl der Erfolge binomialverteilt zu den Parametern n und p. Noch präziser läßt sich der Zusammenhang mit dem bislang nicht behandelten Begriff der „Zufallsvariable“ oder „Zufallsgröße“ ausdrücken: In einer Bernoullikette ist die Anzahl der Erfolge eine Zufallsgröße, als deren Verteilung sich die Binomialverteilung ergibt.