Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 7. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Setzen wir $s := a - 1$, so ist $s > 0$ wegen $a > 1$. Gemäß dem Hinweis suchen wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 + ns > x$. Es gilt aber

$$1 + ns > x \quad \Longleftrightarrow \quad ns > x - 1 \quad \overset{\text{da } s > 0}{\Longleftrightarrow} \quad n > \frac{x-1}{s}$$

Das archimedische Axiom liefert uns nun, was wir brauchen: Es garantiert die Existenz einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{x-1}{s}$.

Nach der Bernoullischen Ungleichung $(1 + s)^n \geq 1 + ns$ (die für $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \geq -1$ gilt) haben wir dann

$$x < 1 + ns \leq (1 + s)^n = a^n,$$

also $a^n > x$, wie verlangt.

b)

- *Maximum:* Wegen $a > 1$ ist $a < a^2 < a^3 < \dots$, also $a^n \geq a$ für alle $n \geq 1$ und damit $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \geq 1$. Damit ist $\frac{1}{a}$ eine obere Schranke für M; da aber $\frac{1}{a} = a^{-1} \in M$ gilt, folgt $\frac{1}{a} = \max M$.
- *Infimum:* Wir müssen zeigen:
  (i) 0 ist eine untere Schranke für M.
  (ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist ε *keine* untere Schranke für M mehr.

  Zu (i): Wegen $a > 0$ ist auch $a^n > 0$ und damit $\frac{1}{a^n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist 0 eine untere Schranke von M.

  Zu (ii): Sei $\varepsilon > 0$; wir zeigen, daß es ein n gibt mit $a^{-n} < \varepsilon$. Aber es gilt

  $$a^{-n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a^n > \frac{1}{\varepsilon},$$

  und nach a) (angewandt auf $x := \frac{1}{\varepsilon}$) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, das diese Ungleichung erfüllt.

Aufgabe 2.

a) Ist $x = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ und $\mathrm{ggT}(z, n) = 1$, so gilt

$$\begin{aligned} & x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \left(\frac{z}{n}\right)^2 + a_1 \frac{z}{n} + a_0 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{z^2}{n^2} + a_1 \frac{z}{n} + a_0 = 0 \qquad (\text{„mal } n\text{“}) \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{z^2}{n} + a_1 z + a_0 n = 0. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{z^2}{n} = -a_1 z - a_0 n \in \mathbb{Z},$$

also $n \mid z^2$. Damit taucht jeder Primfaktor von n in z^2 und damit auch in z auf.

Andererseits aber haben z und n aufgrund von $\mathrm{ggT}(z, n) = 1$ keine gemeinsamen Primfaktoren! Das bedeutet: n hat *gar keine* Primfaktoren, also ist $n = 1$ (beachte $n > 0$, sonst wäre auch noch $n = -1$ möglich).

Das bedeutet $x = \frac{z}{n} = z \in \mathbb{Z}$, und dann folgt aus $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ die Beziehung

$$a_0 = -x^2 - a_1 x = -x \cdot (x + a_1),$$

also $x \mid a_0$.

b) Die allgemeine Aussage lautet:

Es sei $d \in \mathbb{N}$. Sind $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 \neq 0$, und ist x eine Lösung der Gleichung

$$x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \overset{!}{=} 0$$

mit $x \in \mathbb{Q}$, so ist sogar $x \in \mathbb{Z}$ und $x \mid a_0$.

Der Beweis ist im Wesentlichen identisch mit dem Beweis aus a): Schreiben wir $x = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ und $\mathrm{ggT}(z, n) = 1$, so gilt

$$\begin{aligned}
& x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \\
\iff\quad & \left(\frac{z}{n}\right)^d + a_{d-1} \left(\frac{z}{n}\right)^{d-1} + \ldots + a_1 \frac{z}{n} + a_0 = 0 \\
\iff\quad & \frac{z^d}{n^d} + a_{d-1} \frac{z^{d-1}}{n^{d-1}} + \ldots + a_1 \frac{z}{n} + a_0 = 0 \qquad (\text{„mal } n^{d-1}\text{“}) \\
\iff\quad & \frac{z^d}{n} + a_{d-1} z^{d-1} + \ldots + a_1 z n^{d-2} + a_0 n^{d-1} = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{z^d}{n} = -a_{d-1} z^{d-1} - \ldots - a_1 z n^{d-2} - a_0 n^{d-1} \in \mathbb{Z},$$

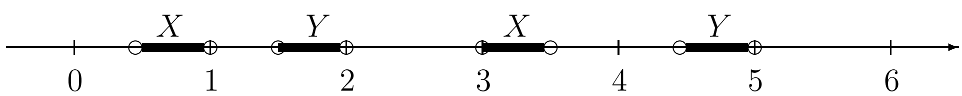
also $n \mid z^d$. Wegen $\mathrm{ggT}(z, n) = 1$ und $n > 1$ heißt das $n = 1$, also $x = z \in \mathbb{Z}$, und dann folgt

$$\begin{aligned}
a_0 &= -x^d - a_{d-1} x^{d-1} - \ldots - a_1 x \\
&= -x \cdot \left(x^{d-1} + a_{d-1} x^{d-2} + \ldots + a_1\right),
\end{aligned}$$

also $x \mid a_0$.

Aufgabe 3.

a) Beispielsweise kann X ein „links“ von Y liegendes Intervall sein; oder X und Y sind jeweils aus mehreren Intervallen zusammengesetzt, die abwechselnd liegen wie im folgenden Bild:



b) Es sei $x \in X$ beliebig. Nach Voraussetzung finden wir ein $y \in Y$ mit $x < y$, und dann gilt $x < y \leq \sup Y$, also insgesamt $x \leq \sup Y$. Also ist $\sup Y$ eine obere Schranke für X, und das bedeutet $\sup X \leq \sup Y$ (denn $\sup X$ ist ja die *kleinste* obere Schranke für X).

c) Beispielsweise kann man $X = \left\{ \frac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ und $Y = \{1\}$ nehmen. Nach Aufgabe 3 b) vom 6. Tutoriumsblatt wissen wir, daß X beschränkt ist mit $\sup X = 1 = \sup Y$, und jedes Element von X ist < 1, so daß die Voraussetzung erfüllt ist.

Ein anderes Beispiel ist $X = Y = [0, 1[$. Hier ist selbstverständlich $\sup X = \sup Y$, und die Voraussetzung an X und Y ist erfüllt, denn ein rechts offenes Intervall hat die Eigenschaft, daß es zu jedem seiner Elemente ein noch größeres enthält.

Aufgabe 4.

a) Die formale Negation der Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x < n$$

lautet nach den im ersten Semester behandelten Regeln („von links nach rechts; $\exists$ und $\forall$ verwandeln sich ineinander; die hinterste Aussage wird negiert“)

$$\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x \geq n,$$

also:

„Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und der Eigenschaft: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x \geq n$.“

b) Gilt das archimedische Axiom nicht, so trifft seine Negation zu, also die in a) formulierte Aussage: Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $x \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das bedeutet genau, daß x eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist.

c) Da s obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist, gilt $n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber da auch $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist, gilt ebenso auch $n + 1 \leq s$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n + 1 \leq s$, also $n \leq s - 1$. Das bedeutet, daß $s - 1$ eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist. Aber nach Definition des Supremums ist s die *kleinste* obere Schranke von $\mathbb{N}$, Widerspruch!