Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 7. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Infimum und Supremum). Es sei $a > 1$ eine reelle Zahl.

a) Man beweise: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > x$.

(Saloppe Kurzform dieser Aussage: „Genügend hohe Potenzen einer reellen Zahl > 1 werden beliebig groß.“)

(Anleitung: Mit $s := a - 1$ zeige man zunächst mit dem archimedischen Axiom, daß es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $1 + ns > x$, und verwende dann die Bernoullische Ungleichung.)

b) Man beweise: Für die Menge $M := \{a^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\inf M = 0$ und $\max M = \frac{1}{a}$.

Aufgabe 2 (Brüche und Primfaktorzerlegungen).

a) Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 \neq 0$. Man zeige: Ist x eine Lösung der Gleichung

$$x^2 + a_1 x + a_0 \stackrel{!}{=} 0,$$

und gilt $x \in \mathbb{Q}$, so gilt sogar $x \in \mathbb{Z}$, und es ist $x \mid a_0$.

(Anleitung: Man schreibe x als gekürzten Bruch, $x = \frac{z}{n}$ mit $n > 0$, zeige $n \mid z^2$ und folgere $x \in \mathbb{Z}$ und schließlich $x \mid a_0$.)

b) Man formuliere und beweise eine Verallgemeinerung der Aussage aus a) für Gleichungen der Form $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \stackrel{!}{=} 0$ oder allgemein $x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \stackrel{!}{=} 0$.

Diese Aussage ist eine Rechtfertigung für das aus der Schule bekannte „Raten von Nullstellen“: Die einzigen *rationalen* Lösungen sind ganzzahlige Teiler des konstanten Koeffizienten (und *irrationale* Lösungen „findet man sowieso nicht“ ohne Lösungsformel). – Eine Verallgemeinerung findet sich auf dem 7. Übungsblatt, Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (Supremum und Infimum). Es seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ zwei beschränkte Teilmengen, und es sei bekannt: Für jedes $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $x < y$.

a) Man skizziere eine solche Situation graphisch.

b) Man beweise, daß $\sup X \leq \sup Y$ ist.

c) Man zeige durch ein Beispiel, daß nicht $\sup X < \sup Y$ zu gelten braucht.

Aufgabe 4 (Beschreibung von $\mathbb{R}$). Man beweise den Satz:

„Aus der Vollständigkeit des angeordneten Körpers $\mathbb{R}$ folgt das archimedische Axiom.“

Dazu nehme man an, daß zwar das Vollständigkeitsaxiom, nicht jedoch das archimedische Axiom erfüllt sei, und folgere aus dieser Kombination einen Widerspruch. Im einzelnen gehe man folgendermaßen vor:

a) Man bilde die Negation der Aussage des archimedischen Axioms

„Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.“

Man nehme nun an, das archimedische Axiom wäre für $\mathbb{R}$ *nicht* erfüllt.

b) Man zeige: Dann ist $\mathbb{N}$ eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Diese Aussage sollte man nicht so lesen, daß ohne das archimedische Axiom die natürlichen Zahlen plötzlich „merkwürdige Eigenschaften" hätten, sondern daß es dann „gigantisch große" reelle Zahlen gäbe, so riesig, daß sie als obere Schranke für $\mathbb{N}$ geeignet wären.

Man nehme nun zusätzlich die Gültigkeit des Vollständigkeitsaxioms für $\mathbb{R}$ an; dann existiert aufgrund von b) die Zahl $s := \sup \mathbb{N}$.

c) Man zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n \leq s$ sowie $n + 1 \leq s$.

d) Man folgere, daß $s - 1$ eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist, und leite daraus einen Widerspruch ab.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 2.–4. Juni 2014 behandelt.