Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 5. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Äquivalenzklassen). Es sei $M = [0,1]$ und $R \subset M \times M$ die Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen

$$\left[0, \frac{3}{10}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 1\right], \ \left]\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right], \ \left]\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right[.$$

Man skizziere R in der Anschauungsebene.

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelationen). Gegeben sei die Relation

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x - y \in \mathbb{Z}\right\}$$

auf der Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen.

a) Man zeige, daß R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^+$ ist.

b) Man bestimme die Äquivalenzklassen von 1 und von 0,25.

c) Man bestimme den kleinsten Repräsentanten der Äquivalenzklasse [7,2].

Aufgabe 3 (Äquivalenzrelationen). Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Man betrachte die Relation

$$R = \{(x,y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}$$

auf der Menge M.

a) Man zeige, daß R eine Äquivalenzrelation auf M ist.

b) Welche Eigenschaft muß f haben, damit jede Äquivalenzklasse bezüglich R genau ein Element besitzt?

Aufgabe 4 (zur Konstruktion von $\mathbb{Q}$). Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Dabei gilt $\mathbb{Q} = M/\!\sim\, = [M]$ (mit der in Satz 10.1 der Vorlesung definierten Äquivalenzrelation $\sim$), wobei $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ist und $\frac{a}{b}$ eine Kurzschreibweise für die Klasse $[(a,b)]$ des Elements (a,b). Laut Vorlesung (Bemerkung 10.5) sind auf der Menge $\mathbb{Q}$ durch

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ wohldefiniert.
Man rechne für den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ die beiden Assoziativgesetze nach.

Erleuchtung zu dieser Aufgabe (und den entsprechenden Abschnitten der Vorlesung): Bislang wurden die Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$ in der Vorlesung einfach als „schon immer vorhanden“ betrachtet. Für den Körper $\mathbb{Q}$ vergessen wir nun diese Annahme und zeigen, wie er, ausgehend vom Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, *konstruiert* werden kann, wenn er *noch nicht bekannt ist*. In einer späteren Übungsaufgabe werden wir sehen, wie man ganz ähnlich die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ausgehend von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ konstruieren kann; ebenso ist es – mit etwas größerem Aufwand – möglich, den Körper $\mathbb{R}$ ausgehend vom Körper $\mathbb{Q}$ zu konstruieren.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 19.–21. Mai 2014 behandelt.