Mathematisches Institut der Universität München Daniel Rost
Sommersemester 2014 Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 3. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Rechnen in $\mathbb{Z}_n$). Man löse die Gleichung $\overline{76} \cdot x = \overline{32}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}_{180}$ und gehe dazu in folgenden Schritten vor:

a) Man bestimme einen größten gemeinsamen Teiler d von 76 und 180.

b) Man bestimme Zahlen $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ mit $d = 76m_1 + 180m_2$.

c) Man bestimme *eine* Lösung der Gleichung $\overline{76} \cdot x = \overline{32}$ in $\mathbb{Z}_{180}$.

d) Man gebe *alle* Lösungen der Gleichung $\overline{76} \cdot x = \overline{32}$ in $\mathbb{Z}_{180}$ an.

Aufgabe 2 (Rechnen im Körper $\mathbb{Z}_p$). Es sei p eine Primzahl.

a) Man zeige $\overline{a}^p = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$ für alle $a \in \mathbb{N}_0$ mittels vollständiger Induktion.
(Hinweis: „Freshman's Dream"!)

b) Man folgere aus a), daß $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ für alle $\overline{0} \neq \overline{a} \in \mathbb{Z}_p$ gilt.

c) Man erläutere, inwiefern die Aussage aus b) auch aus dem Satz von Euler–Fermat (vgl. Aufgabe 2 vom 2. Tutoriumsblatt) folgt.

Wieviele verschiedene Lösungen hat demnach die Gleichung $x^{p-1} = \overline{1}$ im Körper $\mathbb{Z}_p$?

Aufgabe 3 (gemischt-zusammengesetzte Zahlen). Nach Definition ist eine natürliche Zahl $n \geq 2$ genau dann *zusammengesetzt* (d.h. *keine* Primzahl, also *reduzibel*), wenn es $a, b \in \mathbb{N}$ gibt mit $a, b > 1$ und $n = a \cdot b$. Wir nennen n im folgenden *gemischt-zusammengesetzt*, wenn man dabei zusätzlich $a \neq b$ erreichen kann.

a) Man untersuche für die Zahlen $2, 3, 4, \dots, 20$, welche von ihnen gemischt-zusammengesetzt sind und welche nicht.

b) Man formuliere eine Vermutung, welche natürlichen Zahlen gemischt-zusammengesetzt sind und welche nicht.

c) Man beweise die Vermutung aus b).

Aufgabe 4 (zum Satz von Wilson). Es sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Der *Satz von Wilson* (der auf dem 2. Übungsblatt, Aufgabe 4, bewiesen wird) besagt: Genau dann ist n eine Primzahl, wenn $\overline{(n-1)!} = \overline{-1}$ in $\mathbb{Z}_n$ gilt. In dieser Aufgabe versuchen wir, die Klasse $\overline{(n-1)!}$ in $\mathbb{Z}_n$ auch im Fall, daß n *keine* Primzahl ist, genauer zu bestimmen.

a) Man zeige: Ist n gemischt-zusammengesetzt, so gilt $\overline{(n-1)!} = \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_n$.

b) Man zeige: Ist n zusammengesetzt und $n \neq 4$, so gilt $\overline{(n-1)!} = \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_n$.
(Hinweis: Die gemischt-zusammengesetzten Zahlen sind nach a) bereits erledigt. Aus Aufgabe 3 wissen wir, welche Zahlen nun noch zu untersuchen sind.)

c) Was passiert für $n = 4$?

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 5.–7. Mai 2014 behandelt.