Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 1. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Das „normale“ Verfahren zum Faktorisieren ist aus der Schule bekannt und braucht wohl nicht vorgeführt zu werden (a ist gerade, also ist 2 ein Primfaktor; diesen dividiert man aus und einen Primfaktor des Ergebnisses usw.). Stattdessen skizziere ich einen trickreichen Weg ohne Suchen von Primfaktoren: Es ist

$$a = 792 = 800-8 = 8\cdot(100-1) = 8\cdot(10^2-1^2) = 8\cdot(10-1)\cdot(10+1) = 8\cdot 9\cdot 11 = 2^3\cdot 3^2\cdot 11.$$

Die Teiler von a sind damit genau die Zahlen $\pm 2^a \cdot 3^b \cdot 11^c$ mit $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 2$ und $0 \leq c \leq 1$. Dies sind $2 \cdot (3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 48$ Stück, und zwar ist

$$T(792) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 11, \pm 12, \pm 18, \pm 22, \pm 24, \pm 33, \pm 36, \pm 44, \pm 66, \\ \pm 72, \pm 88, \pm 99, \pm 132, \pm 198, \pm 264, \pm 396, \pm 792\}.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} b = 6! \cdot 8! &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)^2 \cdot 7 \cdot 8 \\ &= (2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot 7 \cdot 2^3 \\ &= (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 \cdot 7 \cdot 2^3 \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2^3 \\ &= 2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

Damit besitzt b genau $2 \cdot (11+1) \cdot (4+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ Teiler.

Aufgabe 2. Wie in der Vorlesung gezeigt (und in Aufgabe 1 schon verwendet) wurde, besitzt eine Zahl a mit der Primfaktorzerlegung

$$a = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und Exponenten $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ genau $2 \cdot (a_1+1) \cdot \ldots \cdot (a_r+1)$ verschiedene ganzzahlige Teiler. Insbesondere ist die Anzahl der Teiler unabhängig davon, *welche* Primzahlen in der Primfaktorzerlegung von a auftauchen!

Um Eindeutigkeit zu erzwingen, ist es in dieser Aufgabe zweckmäßig, sich zueinigen, die Primfaktorzerlegung einer Zahl nicht nach den *Primzahlen*, sondern nach den *Exponenten* zu sortieren, also stets $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$ zu fordern.

a) Wir müssen alle Möglichkeiten finden, die Zahl 36 in der Form $2 \cdot (a_1+1) \cdot \ldots \cdot (a_r+1)$ zu schreiben, was darauf hinausläuft, alle Möglichkeiten finden, die Zahl $18 = 36/2$ als Produkt irgendwelcher natürlicher Zahlen ≥ 2 zu schreiben.

Es ist $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$. Die Möglichkeiten, diese Zahl als Produkt natürlicher Zahlen ≥ 2 zu schreiben, sind genau

$$18 = 9 \cdot 2 = 6 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2.$$

Diese Liste kann man systematisch erstellen, indem man sich vornimmt, die Teiler stets nach Größe absteigend anzuordnen, und systematisch die Möglichkeiten für die erste Zahl in einer solchen Zerlegung abzuklappern.

Damit gibt es die folgenden vier Möglichkeiten, die Zahl 36 in der Form $2 \cdot (a_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_r + 1)$ mit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ zu schreiben:

$$\begin{array}{ll}
r = 1,\ a_1 = 17 & \text{(zu } 36 = 2 \cdot 18\text{),} \\
r = 2,\ a_1 = 8,\ a_2 = 1 & \text{(zu } 36 = 2 \cdot 9 \cdot 2\text{),} \\
r = 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 2 & \text{(zu } 36 = 2 \cdot 6 \cdot 3\text{),} \\
r = 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1 & \text{(zu } 36 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2\text{).}
\end{array}$$

Die Zahlen mit genau 36 Teilern sind also genau die Zahlen mit den Primfaktorzerlegungen

$$\pm p_1^{17}, \quad \pm p_1^8 \cdot p_2, \quad \pm p_1^5 \cdot p_2^2, \quad \pm p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_1, p_2, p_3.

b) Solche Zahlen gibt es nicht! Dies kann man auf verschiedene Arten einsehen:

- Man kann abschätzen, wie viele Teiler eine Zahl b höchstens haben kann. Die gröbste Abschätzung ist: Die natürlichen Teiler von b liegen zwischen 1 und $|b|$, also gibt höchstens $|b|$ natürliche und damit höchstens $2\,|b|$ ganzzahlige Teiler.

  Diese Abschätzung ist nicht gut genug, um für unsere Aufgabe viel auszusagen: Sie liefert die Ungleichung $200 \leq 2\,|b|$, also $|b| \geq 100$ – wir müßten also noch alle Zahlen mit $100 \leq |b| \leq 180$ überprüfen. Verbessern wir also das Argument:

  Der betragsgrößte Teiler von b ist stets $|b|$; der nächstkleinere hat aber höchstens den Wert $\frac{1}{2}\,|b|$. Die *natürlichen* Teiler von b außer $|b|$ tummeln sich also alle im Bereich $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}\,|b|$, so daß b höchstens $1 + \frac{1}{2}\,|b|$ natürliche und damit höchstens $2 + |b|$ ganzzahlige Teiler hat. Dies liefert in unserer Aufgabe die Ungleichung $200 \leq 2 + |b|$, also $|b| \geq 198$. Eine Zahl mit genau 200 Teilern muß also mindestens den Betrag 198 haben, so daß es keine solchen Zahlen mit $|b| \leq 180$ gibt.

  Man kann dieses Argument weiter ausreizen, um noch bessere Abschätzungen für die Teileranzahl zu bekommen: Die drei größten natürlichen Teiler von b haben höchstens die Werte $|b|$, $\frac{1}{2}\,|b|$ und $\frac{1}{3}\,|b|$. Dies bedeutet, daß b höchstens $2 + \frac{1}{3}\,|b|$ natürliche und damit höchstens $4 + \frac{2}{3}\,|b|$ ganzzahlige Teiler hat.

- Wir führen die gleichen Überlegungen durch wie in a), müssen aber hinterher noch überprüfen, welche Wahl der beteiligten Primzahlen möglich sind, damit sich nur Zahlen mit Betrag ≤ 180 ergeben.

  Es sind die möglichen Produktdarstellungen der Zahl $100 = 200/2$ zu bestimmen: Es ist

  $$100 = 50 \cdot 2 = 25 \cdot 4 = 25 \cdot 2 \cdot 2 = 20 \cdot 5 = 10 \cdot 10 = 10 \cdot 5 \cdot 2 = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2.$$

  Dies ergibt die folgenden Möglichkeiten für die Verteilung der Exponenten in der Primfaktorzerlegung von a:

  $$\begin{array}{ll}
  r = 1,\ a_1 = 99 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 100\text{),} \\
  r = 2,\ a_1 = 49,\ a_2 = 1 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 50 \cdot 2\text{),} \\
  r = 2,\ a_1 = 24,\ a_2 = 3 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 25 \cdot 4\text{),} \\
  r = 3,\ a_1 = 24,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 2\text{),} \\
  r = 2,\ a_1 = 19,\ a_2 = 4 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 20 \cdot 5\text{),} \\
  r = 2,\ a_1 = 9,\ a_2 = 9 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 10 \cdot 10\text{),} \\
  r = 3,\ a_1 = 9,\ a_2 = 4,\ a_3 = 1 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 2\text{),} \\
  r = 3,\ a_1 = 4,\ a_2 = 4,\ a_3 = 3 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4\text{),} \\
  r = 4,\ a_1 = 4,\ a_2 = 4,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1 & \text{(zu } 200 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2\text{).}
  \end{array}$$

Nun darf aber in der Primfaktorzerlegung von a kein Exponent größer sein als 7: Denn die kleinste Primzahlpotenz mit einem Exponenten > 7 ist $2^8 = 256$, und uns interessieren nur Zahlen, deren Betrag ≤ 180 ist. Also müssen wir alle Zerlegungen streichen, die einen Exponenten ≥ 8 enthalten – und dann bleiben nur die beiden untersten Zeilen übrig. Die einzigen in Frage kommenden Möglichkeiten sind also Primzfaktorzerlegungen der Form

$$\pm p_1^4 \cdot p_2^4 \cdot p_3^3 \quad \text{und} \quad \pm\, p_1^4 \cdot p_2^4 \cdot p_3 \cdot p_4$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4.
In beiden möglichen Darstellungen kommt das Produkt $p_1^4 \cdot p_2^4$ vor. Dieses hat mindestens den Wert $2^4 \cdot 3^4 = 6^4 = 1296 > 180$. Also können wir mit keiner der beiden Darstellungen eine Zahl erzeugen, deren Betrag ≤ 180 ist. Es gibt also keine Zahlen der gewünschten Art!

- Eine Kurzversion des letzten Arguments, die alle „überflüssigen" Schritte ausklammert: Schreibt man die Zahl $100 = 200/2$ als Produkt natürlicher Zahlen, so muß es entweder einen Faktor geben, der ≥ 25 ist, oder zwei Faktoren, die ≥ 5 sind (denn irgendwo müssen die beiden Fünfer in der Primfaktorzerlegung von 100 ja herkommen). Dies bedeutet: Eine Zahl b mit 200 ganzzahligen (also 100 natürlichen) Teilern muß in ihrer Primfaktorzerlegung entweder mindestens einen Primfaktor mit Exponent ≥ 24 enthalten, oder aber mindestens zwei Primfaktoren mit Exponent ≥ 4. Im ersten Fall ist dann aber $|b| \geq 2^{24}$, im zweiten immerhin noch $|b| \geq 2^4 \cdot 3^4 = 1296$ – in jedem Fall ein Widerspruch zu $|b| \leq 180$.

c) Nein, eine solche Zahl gibt es nicht – denn die Formel für die Anzahl der Teiler aus der Vorlesung liefert immer ein endliches Resultat.

Aufgabe 3.

a) Für jedes $2 \leq k \leq n$ ist k ein Teiler von $n!$ (denn es ist ja $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot \ldots \cdot n$); damit ist $n! + k$ durch k teilbar. Wäre nun $n! + k$ eine Primzahl, so müßte folglich $n! + k = k$ sein, was wegen $n! > 0$ nicht sein kann.

b) Dies funktioniert ähnlich wie in Euklids Beweis der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen: Es sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primfaktor von $n! + 1$. Ich behaupte, daß $p \in B_n$ gilt. Offensichtlich ist $p \leq n! + 1$, so daß nur $p > n$ zu zeigen ist. Wäre aber $p \leq n$, so wäre p ein Teiler von $n!$ und könnte damit kein Teiler von $n! + 1$ sein. Also ist doch $p > n$, d.h. $p \in B_n$, und das beweist, daß B_n eine Primzahl enthält (nämlich p).

Aufgabe 4.

a) Dies ist die geometrische Summenformel, die nur in der das Gedächtnis am wenigstens belastenden Form $x^d - y^d = (x - y) \cdot (\ldots)$ benötigt wird: Ist $n = e \cdot d$ mit $d > 1$ ungerade, so ist

$$\begin{aligned} 2^n + 1 = 2^{e \cdot d} + 1 = (2^e)^d + 1^d &= (2^e)^d - (-1)^d \\ &= (2^e - (-1)) \cdot (\ldots) \\ &= (2^e + 1) \cdot (\ldots). \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt allgemein, daß die geometrische Summenformel für *ungerade* Exponenten auch einen Bruder hat, der für *Summen* gilt, nämlich $x^d + y^d = (x + y) \cdot (\ldots)$ für d ungerade. – Für *gerade* Exponenten kann es keine solche Formel geben, denn beispielsweise ist $2^2 + 3^2 = 13$ nicht durch $2 + 3 = 5$ teilbar.

Wenn wir nun zeigen können, daß $1 < 2^e + 1 < 2^n + 1$ ist, so sind wir fertig, weil wir damit einen Teiler von $2^n + 1$ gefunden haben. Natürlich ist $2^e > 0$ (denn $e \in \mathbb{N}$), also ist $2^e + 1 > 1$ klar. Wegen $d > 1$ und $e \cdot d = n$ ist aber $e < n$, und daraus folgt $2^e + 1 < 2^n + 1$.

b) Ist $2^n + 1$ eine Primzahl, so besitzt n laut a) keinen ungeraden Teiler $\neq 1$. Also dürfen in der Primfaktorzerlegung von n keine ungeraden Primzahlen auftauchen, und das bedeutet $n = 2^k$ für ein $k \geq 0$.