Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 10. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1. Wir betrachten in einem geeigneten (weiter spezifizierten) Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) die beiden Ereignisse

$$K: \text{„Die gewählte Person ist Kaffeetrinker."}$$
$$R: \text{„Die gewählte Person ist Raucher."}$$

Die über das Land gegebenen Informationen lassen sich so deuten, daß gilt:

$$P(R) = 0{,}3, \quad P_R(K) = 0{,}15, \quad P_{\overline{R}}(K) = 0{,}3.$$

a) Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(K) &= P_R(K) \cdot P(R) + P_{\overline{R}}(K) \cdot P(\overline{R}) \\ &= 0{,}15 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3) \\ &= 0{,}255. \end{aligned}$$

b) Es ist $P(R \cap K) = P_R(K) \cdot P(R) = 0{,}15 \cdot 0{,}3 = 0{,}045$.

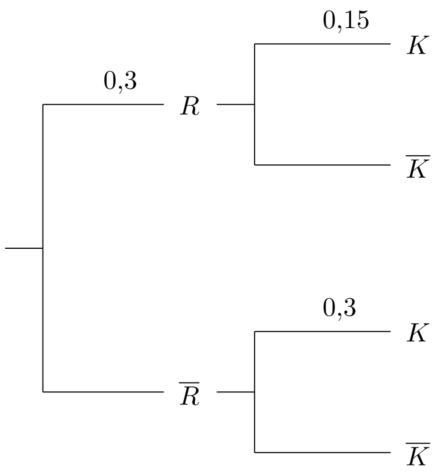
c) Nach der Formel von Bayes (oder nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit unter Verwendung von b)!) ist

$$\begin{aligned} P_K(R) &= \frac{P_R(K) \cdot P(R)}{P(K)} \qquad \left[\overset{\text{b)}}{=} \frac{P(R \cap K)}{P(K)} \right] \\ &= \frac{0{,}15 \cdot 0{,}3}{0{,}255} \\ &= \frac{3}{17} \approx 0{,}18. \end{aligned}$$

d) Wieder unter Verwendung der Formel von Bayes ergibt sich:

$$\begin{aligned} P_{\overline{K}}(\overline{R}) &= \frac{P_{\overline{R}}(\overline{K}) \cdot P(\overline{R})}{P(\overline{K})} \\ &= \frac{(1 - 0{,}3) \cdot (1 - 0{,}3)}{1 - 0{,}255} \\ &= \frac{98}{149} \approx 0{,}66. \end{aligned}$$

Besonders übersichtlich läßt sich die Aufgabe auch mit Hilfe eines Baumdiagramms lösen. In ihm lassen sich die gegebenen absoluten und bedingten Wahrscheinlichkeiten folgendermaßen anordnen:



Die Beschriftung des Baumes läßt sich durch Anwendung der Beziehung $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ mühelos vervollständigen; die Argumente, die ich mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit usw. formuliert hatte, werden dann zu einfachen Anwendungen der beiden Pfadregeln aus der Vorlesung.

Aufgabe 2. Für eine Vierfeldertafel sind die gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten umzurechnen in Wahrscheinlichkeiten von Durchschnitten: Dies ergibt

$$P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot P(B)$$

sowie

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot P(\overline{B}).$$

Damit erhalten wir das folgende Rudiment einer Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	$0{,}5 \cdot P(B)$	?	0,6
$\overline{A}$	?	$0{,}2 \cdot P(\overline{B})$	0,4
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Ein Blick in die B-Spalte zeigt nun, daß auch $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}5 \cdot P(B)$ sein muß:

	B	$\overline{B}$	
A	$0{,}5 \cdot P(B)$	?	0,6
$\overline{A}$	$0{,}5 \cdot P(B)$	$0{,}2 \cdot P(\overline{B})$	0,4
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

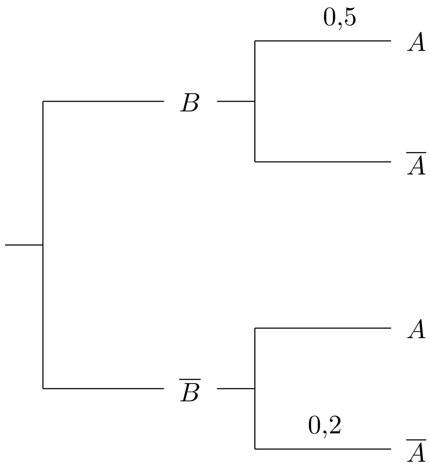
Dann ist aber wegen $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

$$\begin{aligned} & 0{,}5 \cdot P(B) + 0{,}2 \cdot (1 - P(B)) = 0{,}4 \\ \iff\ & 0{,}3 \cdot P(B) = 0{,}2 \\ \iff\ & P(B) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Vierfeldertafel

	B	$\overline{B}$	
A	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	0,6
$\overline{A}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	0,4
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Auch die Argumentation in dieser Aufgabe läßt sich anhand eines Baumes nachvollziehen: Wenn wir die Frage nach Ereignis B als 1. Stufe und die Frage nach Ereignis A als zweite Stufe eines Baumes notieren, können wir die gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten direkt eintragen:



Die Information, daß $P(A) = 0{,}6$ ist, hat dann aber nicht unmittelbar Platz im Baum; sie läßt sich jedoch als Gleichung für die bislang unbekannte Wahrscheinlichkeit $P(B)$ auffassen: Nach den Pfadregeln gilt nämlich

$$\begin{aligned} 0{,}6 \overset{!}{=} P(A) &= P(B) \cdot 0{,}5 + (1 - P(B)) \cdot (1 - 0{,}2) \\ &= 0{,}8 - 0{,}3 \cdot P(B) \\ \iff \quad 0{,}3 \cdot P(B) &= 0{,}2 \\ \iff \quad P(B) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

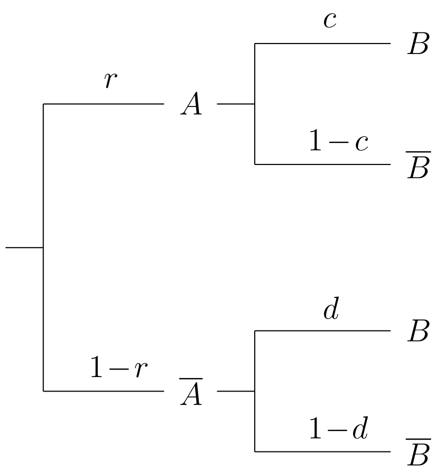
Mit diesem zusätzlichen Resultat läßt sich die Vierfeldertafel dann bequem aufstellen.

Aufgabe 3.

a) In einem geeigneten (nicht weiter spezifizierten) Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) betrachten wir die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &: \text{„Der Schein ist gefälscht."} \\ B &: \text{„Das Gerät blinkt auf."} \end{aligned}$$

(i) Es ergibt sich das folgende Baumdiagramm:



Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist nun

$$\begin{aligned} p = P_B(\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{d \cdot (1-r)}{r \cdot c + (1-r) \cdot d}, \end{aligned}$$

wobei die einzelnen Wahrscheinlichkeiten nach den Pfadregeln berechnet wurden.

(ii) Wegen $P_A(B) = c$ und $P_{\overline{A}}(B) = d$ gilt $P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A) = c \cdot r$ sowie $P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A}) = d \cdot (1-r)$. Damit ergibt sich die rudimentäre Vierfeldertafel

	B	$\overline{B}$	
A	$c \cdot r$	?	r
$\overline{A}$	$d \cdot (1-r)$	?	$1-r$
	?	?	1

Diese läßt sich problemlos auffüllen zu

	B	$\overline{B}$	
A	$c \cdot r$	$(1-c) \cdot r$	r
$\overline{A}$	$d \cdot (1-r)$	$(1-d) \cdot (1-r)$	$1-r$
	$c \cdot r + d \cdot (1-r)$	$(1-c) \cdot r + (1-d) \cdot (1-r)$	1

Damit ergibt sich

$$p = P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{d \cdot (1-r)}{c \cdot r + d \cdot (1-r)},$$

wie bereits in (i).

(iii) Die Formel von Bayes besagt

$$p = P_B(\overline{A}) = \frac{P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})}{P(B)}.$$

Den Wert $P(B)$ erfahren wir nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: Es ist

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A}) = c \cdot r + d \cdot (1-r).$$

Damit ergibt sich

$$p = P_B(\overline{A}) = \frac{P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})}{P(B)} = \frac{d \cdot (1-r)}{c \cdot r + d \cdot (1-r)}.$$

(Es lohnt sich, während jeder der drei Varianten ab und zu in einen Blick auf die anderen beiden zu werfen: Dann merkt man, daß – und auf welche Weise – jeder der drei Zugänge zu den gleichen Rechnungen führt.)

b) Hier muß man nur noch Werte einsetzen: Es ergibt sich wegen $r = 0{,}0015$

$$p = \frac{0{,}001 \cdot (1 - 0{,}0015)}{0{,}99 \cdot 0{,}0015 + 0{,}001 \cdot (1 - 0{,}0015)} = \frac{1997}{4967} \approx 0{,}40.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schein, an dem das Gerät aufblinkt, dennoch echt ist, beträgt also rund 40 Prozent.

c) Die beiden angegebenen Ungleichungen (c ist mindestens $0{,}98$, d ist höchstens $0{,}002$) sind von der Art, daß sie Untergrenzen (und keine Obergrenzen!) für die Verläßlichkeit des Gerätes angeben. Bei einem ideal verläßlichen Gerät sollte die Wahrscheinlichkeit p gegen 0 gehen; wenn wir eine Untergrenze für die Verläßlichkeit des Gerätes haben, sollte sich das in eine obere Schranke für die Größenordnung von p übersetzen; wir sollten also ein Resultat der Art „p ist höchstens …" erhalten können.

Betrachtet man unmittelbar die Beziehung

$$p = \frac{d \cdot (1-r)}{c \cdot r + d \cdot (1-r)},$$

so stellt man fest, daß die beiden für c und d gegebenen Ungleichungen nicht direkt für Aussagen verwendet werden können, weil sie in verschiedene Richtungen gehen. Die Lage ändert sich jedoch, wenn man den Bruch kürzt:

$$p = \frac{1}{\frac{c}{d} \cdot \frac{r}{1-r} + 1}$$

Hier wissen wir nun $\frac{c}{d} \geq \frac{0{,}98}{0{,}002} = 490$, und wegen $\frac{r}{1-r} = \frac{15/10000}{9985/10000} = \frac{3}{1997}$ folgt

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{r}{1-r} + 1 \geq 490 \cdot \frac{3}{1997} + 1 = \frac{3467}{1997},$$

also

$$p = \frac{1}{\frac{c}{d} \cdot \frac{r}{1-r} + 1} \leq \frac{1997}{3467} \approx 0{,}58.$$

Wie erwartet, haben wir also eine obere Schranke für p gefunden: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein als Fälschung gemeldeter Schein in Wirklichkeit echt ist, beträgt *höchstens* etwa 58 Prozent.

Aufgabe 4. Es bietet sich die Beschreibung des Spiels durch den Ergebnisraum $\Omega = \{W,S\}^3 = \{(h_1,h_2,h_3) \mid h_i \in \{W,S\} \text{ für } i = 1,2,3\}$ an, auf dem die Laplaceverteilung herrscht, also wegen $|\Omega| = 2^3 = 8$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung P mit $P(\{\omega\}) = \frac{1}{8}$ für jedes $\omega \in \Omega$.

a) Wenn jeder Spieler blind rät, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$, denn die Mannschaft gewinnt nur, wenn *jeder* der drei zufällig richtig rät.

Genau genommen, könnte oder müßte man diesen Prozeß durch ein zweistufiges Modell beschreiben: Erst werden zufällig die Hüte verteilt, danach geben die Spieler ihre wiederum zufälligen Tips ab. Unsere Rechnung funktioniert trotzdem, weil sich für jeden einzelnen Spieler bei zufälliger Wahl seiner Hutfarbe und davon unabhängiger zufälliger Wahl seines Tips eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}$ für die Ereignisse „Der Spieler rät richtig" und „Der Spieler liegt falsch" ergibt.)

b) Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist nun $\frac{1}{2}$, denn die Mannschaft gewinnt genau, wenn ihr vorbestimmter „Sprecher" seinen Hut richtig errät.

c) Eine solche Strategie lautet beispielsweise:

> Jeder Spieler, der bei seinen Mitspielern zwei Hüte der gleichen Farbe sieht, gibt den Tip ab, er selber trage einen Hut der *anderen* Farbe.

Bei dieser Strategie wird stets mindestens ein Tip abgegeben – denn von den drei Spielern haben immer mindestens zwei die gleiche Farbe abbekommen; der dritte Spieler wird dann eine Vermutung abgeben.

Es gibt nun zwei mögliche Klassen von Ergebnissen: Entweder alle Spieler haben die gleiche Farbe bekommen, oder nicht.

- Im ersteren Fall (der mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ eintritt) wird bei unserer Strategie jeder Spieler einen Tip abgeben und falsch liegen, die Mannschaft verliert also katastrophal.
- Im zweiteren Fall aber (der mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ eintritt) kommt eine Farbe (z.B. Weiß) doppelt und die andere (z.B. Schwarz) einmal vor. Es sieht also nur ein Spieler (in unserem Fall: der mit dem schwarzen Hut) zwei gleichfarbige (weiße) Hüte, und befolgt er unsere Strategie (und äußert den Tip, sein eigener Hut sei schwarz), so liegt er richtig, und die Mannschaft hat gewonnen.

Also erreicht die Mannschaft mit unserer Strategie eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$.

(Zum Forschen: Gibt es noch bessere Strategien? Kann man ähnliche Strategien für die Verallgemeinerung des Spiels auf Mannschaften mit n Spielern angeben?)