Grundlagen der Mathematik II – 10. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1. In einem Land gibt es 30% Raucher in der Gesellschaft; 15% der Raucher und 30% der Nichtraucher trinken gerne Kaffee. Eine Person wird zufällig ausgewählt; mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) ist diese Person Kaffeetrinker,

b) ist diese Person Raucher und zugleich Kaffeetrinker,

c) ist diese Person Raucher, wenn sie Kaffee trinkt,

d) ist diese Person Nichtraucher, wenn sie keinen Kaffee trinkt?

Aufgabe 2. Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subset \Omega$ Ereignisse mit

$$P(A) = 0{,}6, \quad P_B(A) = 0{,}5 \quad \text{und} \quad P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0{,}2.$$

Man stelle eine vollständige Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten auf.

Aufgabe 3. An der Kasse eines Supermarktes befindet sich ein Gerät, das die Echtheit von 100 €-Scheinen feststellen soll: Es zeigt durch Aufblinken einer Leuchte an, daß ein Schein als falsch eingestuft wird. Es sei r der Anteil von gefälschten 100 €-Scheinen an allen im Umlauf befindlichen 100 €-Scheinen. Es sei c die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Gerät bei einem falschen Schein aufblinkt, und d die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es bei einem echten Schein (irrtümlich) aufblinkt. Uns interessiert die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p dafür, daß ein 100 €-Schein echt ist, an dem das Gerät aufblinkt.

a) Man berechne diese bedingte Wahrscheinlichkeit

(i) mit Hilfe eines Baumdiagramms,

(ii) mit Hilfe einer Vierfeldertafel,

(iii) mit Hilfe des Satzes von Bayes.

Man vergleiche die jeweiligen Schritte und Zwischenergebnisse!

b) Die Kriminalstatistik verrät, daß etwa 15 von 10.000 Scheinen gefälscht sind. Der Hersteller des Gerätes gibt außerdem für die Leistungsfähigkeit des Gerätes die Werte $c = 0{,}99$ und $d = 0{,}001$ an. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit p, daß ein 100 €-Schein echt ist, an dem das Gerät aufblinkt?

c) In Wirklichkeit kann der Hersteller nur *Ungleichungen* für die Wahrscheinlichkeiten garantieren: Er gibt die Abschätzungen $c \geq 0{,}98$ und $d \leq 0{,}002$ an. Kann man nun noch eine Abschätzung für unsere gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit p abgeben? Man überlege zunächst (ohne Rechnung), ob und in welche Richtung (nach oben oder nach unten?) hier eine Abschätzung möglich sein wird, und führe anschließend die Rechnung durch.

Aufgabe 4. Einer Mannschaft aus drei Spielern wird die folgende Aufgabe gestellt: Jedem Spieler wird zufällig und unabhängig voneinander ein weißer oder ein schwarzer Hut aufgesetzt, wobei jeder der Spieler zwar die Farbe der Hüte seiner Mitspieler, nicht aber die seines eigenen Hutes erkennen kann. Nun kann jeder Spieler einen Tip über die Farbe seines Hutes abgeben, muß dies aber nicht tun; die Mannschaft hat gewonnen, wenn mindestens ein richtiger, aber kein falscher Tip abgegeben wird.

Die Spieler dürfen sich vorher über eine Tipstrategie austauschen (z. B. wer bei welcher Situation einen Tip abgeben soll); nach dem Aufsetzen der Hüte ist jedoch jede Kommunikation verboten.

a) Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn jeder Spieler einen zufälligen Tip abgibt?

b) Die Mannschaft verfolgt die Strategie, daß ein vorbestimmter Spieler einen zufälligen Tip abgibt und seine beiden Mitspieler sich enthalten. Wie groß ist nun die Gewinnwahrscheinlichkeit?

c) Mit welcher Strategie kann die Gewinnwahrscheinlichkeit auf 75% erhöht werden?

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 30. Juni–2. Juli 2014 behandelt.