Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 1. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Primfaktorzerlegung).

a) Man bestimme die Primfaktorzerlegung von $a = 792$ und ermittle damit die Teilermenge von a.

b) Man bestimme die Primfaktorzerlegung von $b = 6! \cdot 8!$ und ermittle damit die Anzahl der Teiler von b.

Aufgabe 2 (Teileranzahlen).

a) Man bestimme alle ganzen Zahlen a mit genau 36 ganzzahligen Teilern.

b) Man bestimme alle ganzen Zahlen b mit $|b| \leq 180$, die genau 200 ganzzahlige Teiler besitzen.

c) Gibt es ein $c \in \mathbb{N}$, das unendlich viele Teiler besitzt? Antwort mit Begründung!

Aufgabe 3 (Existenz von Primzahlen). Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ zeige man:

a) Die Menge $A_n := \{n! + k \mid k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2 \leq k \leq n\}$ enthält keine Primzahl.

b) Die Menge $B_n := \{k \in \mathbb{N} \mid n < k \leq n! + 1\}$ enthält mindestens eine Primzahl.

Aufgabe 4 (Fermatsche Primzahlen). Primzahlen der Form $2^n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ heißen *Fermatsche Primzahlen*. Man zeige:

a) Besitzt n einen ungeraden Teiler $d \in \mathbb{N}$ mit $d \neq 1$, so ist $2^n + 1$ reduzibel.
(Tip: Schreibe 1 *als* $-(-1)^d$*.)*

b) Ist $2^n + 1$ eine Primzahl, so ist $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Pierre de Fermat (1608–1655) vermutete, daß die Umkehrung von b) richtig sei, daß also jede Zahl der Form $2^{2^k} + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ eine Primzahl sei. Dies stimmt tatsächlich für $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Erst Leonhard Euler (1707-1783) entdeckte, daß $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$ *keine* Primzahl ist. Bis heute weiß man nicht, ob es überhaupt noch weitere Fermatsche Primzahlen gibt.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 14.–16. April 2014 behandelt.