Partitionszahlen, endliche abelsche Gruppen und Konjugationsklassen in der Symmetrischen Gruppe

Lukas-Fabian Moser, SS 2013

Wir beschreiben zwei Gelegenheiten, an denen in der klassischen Algebra Partitionen (und damit auch Partitionszahlen) auftreten .

Die Klassifikation endlicher abelscher Gruppen

Eine Form des Struktursatzes über endliche abelsche Gruppen besagt:

Satz. *Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so ist G isomorph zu einem kartesischen Produkt*

$$\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_n^{e_n}\mathbb{Z}$$

mit (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ und Exponenten $e_i \geqslant 1$. Die Folge von Paaren $(p_1, e_1), \ldots, (p_n, e_n)$ ist dabei bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Insbesondere ist die Ordnung von G dann $|G| = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$. Im Unterschied zur kanonischen Primfaktorzerlegung tauchen hier aber im allgemeinen mehrere Faktoren zur gleichen Primzahl auf.

Wir notieren zuerst, was der Satz für Gruppen bedeutet, deren Ordnung Potenz einer Primzahl p ist (also für p-Gruppen):

Folgerung. *Ist p eine Primzahl, $e \geqslant 0$ und $e = e_1 + \cdots + e_t$ eine Partition von e (mit $e_1 \geqslant \ldots \geqslant e_t$), so ist*

$$\mathbb{Z}/p^{e_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{e_t}\mathbb{Z}$$

eine abelsche Gruppe der Ordnung p^e. Jede abelsche Gruppe der Ordnung p^e ist isomorph zu einer Gruppe dieses Typs, und Gruppen zu verschiedenen Partitionen von e sind zueinander nicht isomorph.

Folgerung. *Die Anzahl der Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung p^e (p Primzahl) ist $p(e)$.*

Allgemein ergibt sich:

Satz. *Die Anzahl der Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung n ist $p(e_1)\cdot\ldots\cdot p(e_n)$, wobei $n = p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{e_n}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i die Primfaktorzerlegung von n ist.*

Konjugationsklassen in S_n

Wir wiederholen einige Begriffe: Die *Symmetrische Gruppe S_n* besteht als Menge aus allen bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$; sie ist eine Gruppe mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Ihre Elemente heißen *Permutationen*.

Eine spezielle Klasse von Permutationen bilden die *Zyklen*: Ein k-Zyklus ($1 \leqslant k \leqslant n$) ist gegeben durch paarweise verschiedene Elemente $i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}$, wird notiert als $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k) \in S_n$ und ist definiert durch die Abbildungsvorschrift

$$i \mapsto \begin{cases} i, & \text{falls } i \notin \{i_1,\ldots,i_k\}, \\ i_{t+1}, & \text{falls } i = i_t \text{ für ein } 1 \leqslant t < k, \\ i_1, & \text{falls } i = i_k. \end{cases}$$

Kurz gesagt, ist dies also die Abbildung mit $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \ldots \mapsto i_k \mapsto i_1$, die alle übrigen Zahlen unverändert läßt. Man nennt die Zahl k auch die *Länge* des Zyklus $\sigma = (i_1\ \ldots\ i_k)$ und schreibt dafür $\ell(\sigma) = k$.

Man beachte, daß ein 1-Zyklus (i) nach Definition einfach die Identitätsabbildung id (also das neutrale Element von S_n) ist – häufig werden 1-Zyklen deshalb grundsätzlich ausgeschlossen –, und daß Zyklen identisch sein können, ohne durch die gleiche Folge definiert zu sein: Es ist $(1\ 2) = (2\ 1)$ und $(1\ 3\ 2) = (2\ 1\ 3)$.

Nicht jede Permutation ist ein Zyklus: Beispielsweise ist das Produkt $(1\ 2) \circ (3\ 4)$ kein Zyklus (dagegen ist $(1\ 2) \circ (2\ 3) = (2\ 3\ 1)$ ein Zyklus.)

Der *Träger* einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist definiert als die Menge

$$\operatorname{supp}\sigma := \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$$

aller Zahlen, die durch σ verändert werden. Für einen k-Zyklus $\sigma = (i_1\ \ldots\ i_k)$ gilt beispielsweise $\operatorname{supp}\sigma = \{i_1,\ldots,i_k\}$. Zwei Zyklen σ,τ heißen *disjunkt*, wenn ihre Träger disjunkt sind; in diesem Fall gilt $\sigma\circ\tau = \tau\circ\sigma$.

Satz. *Jede Permutation läßt sich als Produkt von disjunkten Zyklen der Länge* $\geqslant 2$ *schreiben, und die dabei auftretenden Faktoren sind bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Für uns nützlicher ist die folgende Variante, die man aus dem letzten Satz erhält, indem man Zahlen, die von der Permutation nicht bewegt werden, mit 1-Zyklen abdeckt:

Folgerung. *Jede Permutation läßt sich auf eindeutige Weise (bis auf die Reihenfolge) als Produkt disjunkter Zyklen der Länge* $\geqslant 1$ *schreiben, deren Träger die ganze Menge* $\{1, \ldots, n\}$ *abdecken, also* $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_s$ *mit disjunkten Zyklen* τ_i *der Länge* k_i *und und* $\sum_i k_i = n$.

Sind die τ_i dabei so sortiert, daß $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_s$ gilt, so nennt man die Folge $(k_1, \ldots, k_s)$ den *Zerlegungszyp* von σ. Dies ist eine Partition von n.

Ist $(i_1 \ \ldots \ i_k)$ ein k-Zyklus und $\sigma \in S_n$ eine beliebige Permutation, so gilt die Rechenregel

$$\sigma \circ (i_1 \ \ldots \ i_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \ \ldots \ \sigma(i_k)).$$

Das bedeutet, daß Konjugierte von Zyklen wieder Zyklen der gleichen Länge sind.

Lemma. *Zwei Permutationen* σ, σ' *sind genau dann zueinander konjugiert, wenn sie den gleichen Zerlegungstyp besitzen.*

Folgerung. *Die Anzahl der Konjugationsklassen in* S_n *ist genau* $p(n)$.