Der Dirichletsche Approximationssatz

Lukas-Fabian Moser, SS 2013

Satz (Dirichletscher Approximationssatz)**.** *Ist α eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, so existiert ein gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ mit $0 < q \leqslant n$ und*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qn}.$$

Der klassische Beweis dieses Satzes benutzt das berühmte *Schubfachprinzip* (historisch ist das Schubfachprinzip durch diesen Beweis weithin bekannt geworden). Wir schreiben $\{x\}$ für den Nachkommateil einer reellen Zahl x, also $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ mit $\{x\} \in [0, 1)$.

Beweis. Wir zerlegen das Intervall $[0, 1)$ in die n Unterintervalle $[0, {}^1\!/_n), [{}^1\!/_n, {}^2\!/_n), \ldots, [{}^{(n-1)}\!/_n, 1)$. Von den $n + 1$ Zahlen $\{0 \cdot \alpha\}, \ldots, \{n \cdot \alpha\}$, die alle in $[0, 1)$ liegen, müssen mindestens zwei im gleichen Unterintervall liegen, d.h. wir finden $0 \leqslant a < b \leqslant n$ mit

$$|\{b\alpha\} - \{a\alpha\}| < \frac{1}{n}.$$

Aber es ist

$$|\{b\alpha\} - \{a\alpha\}| = |b\alpha - \lfloor b\alpha \rfloor - (a\alpha - \lfloor a\alpha \rfloor)| = |\underbrace{(b-a)}_{=:q}\alpha - \underbrace{(\lfloor b\alpha \rfloor - \lfloor a\alpha \rfloor)}_{=:p}|,$$

also haben wir $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$ mit $0 < q \leqslant n$, woraus die Behauptung folgt. (Sollte der Bruch ${}^p\!/_q$ nicht gekürzt sein, so kann man ihn kürzen, und die Ungleichung bleibt korrekt.) □

Ein anderer, besonders eleganter Beweis des Approximationssatzes ergibt sich durch Verwendung der sogenannten *Farey-Folgen*: Die n-te Fareyfolge $\mathscr{F}_n$ besteht aus allen Bruchzahlen zwischen 0 und 1, deren Nenner höchstens n ist, sortiert nach ihrer Größe und immer als Brüche der Form ${}^a\!/_b$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ angegeben (dies erzwingt insbesondere die Darstellung $0 = {}^0\!/_1$ und $1 = {}^1\!/_1$). Es ist also beispielsweise

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= ({}^0\!/_1, {}^1\!/_1)\,, \\
\mathscr{F}_2 &= ({}^0\!/_1, {}^1\!/_2, {}^1\!/_1)\,, \\
\mathscr{F}_3 &= ({}^0\!/_1, {}^1\!/_3, {}^1\!/_2, {}^2\!/_3, {}^1\!/_1)\,, \\
\mathscr{F}_4 &= ({}^0\!/_1, {}^1\!/_4, {}^1\!/_3, {}^1\!/_2, {}^2\!/_3, {}^3\!/_4, {}^1\!/_1)\,.
\end{aligned}$$

Farey-Folgen haben viele nützliche und erstaunliche Eigenschaften; die grundlegendsten sind:

Satz (Struktur der Farey-Folgen)**.** *Für zwei aufeinanderfolgende Brüche* $a/b < a'/b'$ *in der Farey-folge* $\mathscr{F}_n$ *gilt stets* $a'b - ab' = 1$*, und es ist*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}.$$

(Genauer kann man sogar zeigen, daß $(a+a')/(b+b')$ der eindeutig bestimmte Bruch zwischen a/b und a'/b' mit dem kleinsten Nenner ist.)

Auf diesem Satz baut ein besonders einfacher Beweis des Dirichletschen Approximationssatzes auf:

Zweiter Beweis der Approximationssatzes. Man kann sich auf den Fall beschränken, daß $\alpha \in (0,1)$ gilt. (Durch Addition ganzer Zahlen ändert sich die Aussage nicht, und der Fall $\alpha = 0$ ist trivial.) Nimm nun die beiden die Zahl α umgebenden Brüche der Farey-Folge $\mathscr{F}_n$, also $a/b \leqslant \alpha \leqslant a'/b'$. Wegen $a'b - ab' = 1$ ist

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'},$$

und daraus folgt

$$\alpha - \frac{a}{b} \leqslant \frac{1}{bb'} \leqslant \frac{1}{bn},$$

was zu beweisen war. □

Mit nur wenig mehr Aufwand kann man aus diesem Beweis noch mehr herausholen:

Satz (Dirichetscher Approximationssatz, verbesserte Version)**.** *Ist* α *eine reelle Zahl und* n *eine natürliche Zahl, so existiert ein gekürzter Bruch* $\frac{p}{q}$ *mit* $0 < q \leqslant n$ *und*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q(n+1)}.$$

Beweis. Wieder können wir $\alpha \in (0,1)$ annehmen und die beiden um α herum liegenden Brüche der Farey-Folge $\mathscr{F}_n$, also $a/b \leqslant \alpha \leqslant a'/b'$. Dann liegt α entweder zwischen a/b und $(a+a')/(b+b')$ oder zwischen $(a+a')/(b+b')$ und a'/b'; wegen

$$\frac{a+a'}{b+b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+b')} \leqslant \frac{1}{b(n+1)}$$

und

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a+a'}{b+b'} = \frac{1}{b'(b+b')} \leqslant \frac{1}{b'(n+1)}$$

ist also, je nachdem, $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a'}{b'}$ ein Näherungsbruch an α, der die behauptete Ungleichung erfüllt. □

Auch dieser verbesserte Approximationssatz läßt sich mit dem Schubfachprinzip beweisen, das dazu nötige Argument aber etwas komplizierter.

Wir schulden noch den Beweis des Satzes über die Struktur von Farey-Folgen. Die Hauptarbeit leistet dabei das folgende

Lemma. *Ist* $\frac{a}{b} < 1$ *ein Element der Fareyfolge* $\mathscr{F}_n$*, so existeirt (mindestens) ein weiteres Element* $\frac{x}{y}$ *von* $\mathscr{F}_n$ *mit* $bx - ay = 1$*. Ist dabei* y größtmöglich *gewählt, so ist* $\frac{x}{y}$ *das kleinste Element von* $\mathscr{F}_n$ *oberhalb* $\frac{a}{b}$*.*

Beweis. Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $bx - ay = 1$ existieren nach dem Lemma von Bézout, da $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$ ist. Ich behaupte: Ist hier $1 \leqslant y \leqslant n$, so ist $\frac{x}{y}$ ein Element der Fareyfolge $\mathscr{F}_n$: Denn wegen $bx - ay = 1$ ist notwendig auch $x > 0$, und wegen $b > a$ gilt dann $1 = bx - ay > bx - by = b(x - y)$, also $b(x - y) \leqslant 0$, und das bedeutet $x - y \leqslant 0$, also $x \leqslant y$.

Tatsächlich ist es auch stets möglich, y so zu wählen, daß $0 \leqslant y \leqslant n$ ist: Denn ist (x, y) eine Lösung von $bx - ay = 1$, so erhält man alle weitere Lösungen (*de facto* sogar alle) in der Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{Z}$. Wegen $0 < b \leqslant n$ kann man λ dann so wählen, daß y' zwischen 1 und n liegt.

Ist nun y *größtmöglich* gewählt, also so, daß $n - b < y \leqslant n$ gilt, so ist x/y das *kleinste* Element von $\mathscr{F}_n$ oberhalb von $\frac{a}{b}$: Gäbe es nämlich ein weiteres Element $\frac{a'}{b'}$ mit $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{x}{y}$, so hätten wir

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \left(\frac{x}{y} - \frac{a'}{b'}\right) + \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) = \frac{b'x - a'y}{b'y} + \frac{a'b - b'a}{bb'} > \frac{1}{b'y} + \frac{1}{bb'} = \frac{b + y}{bb'y}.$$

Nach unserer Wahl von y ist $b + y > n$, und dann ist der letzte Ausdruck größer als $1/by$ – ein Widerspruch, denn der Ausdruck zu Beginn der Gleichungskette ist genau $1/by$ wegen $bx - ay = 1$. □

Beweis des Satzes über die Struktur der Farey-Folgen. Das Lemma besagt insbesondere: Das kleinste Element x/y von $\mathscr{F}_n$ oberhalb von $\frac{a}{b}$ erfüllt die Beziehung $bx - ay = 1$, und nach Voraussetzung gilt zwangsläufig $x/y = a'/b'$.

Zum Beweis der behaupteten Ungleichungen multipliziert man die erste von ihnen mit $b(b+b')$, was sie äquivalent umformt zur Behauptung $a(b + b') < ab + a'b$, die wiederum äquivalent ist zu $ab' < a'b$, also zu $a/b < a'/b'$. Die zweite Ungleichung beweist man analog. □