

PRAVA SIMETRIČNA VERIŽNICA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 49J05, 49S05

Z metodo variacijskega računa izpeljemo enačbo simetrične verižnice v radialnem gravitacijskem polju. Podamo tudi nekatere lastnosti dobljene krivulje.

THE TRUE SYMMETRIC CATENARY

By using the calculus of variations, we derive the equation of the symmetric catenary in a radial gravitational field. Some properties of the obtained curve are also given.

Nekaj zgodovine problema

Tanka, gibka, neraztegljiva in homogena nit ali veriga, ki jo obesimo v dveh točkah tako, da prosto visi, zaradi težnosti po umiritvi zavzame obliko krivulje, ki ji pravimo *verižnica*. Znanstveniki so se že od nekdaj zanimali, kako bi to znamenito krivuljo opisali tudi matematično. Galileo Galilei (1564–1642) je trdil, da je verižnica kar parabola. Okrog leta 1646 je Christiaan Huygens (1629–1695) v nekem pismu Marinu Mersennu (1588–1648) zaupal, da verižnica ni parabola. Do tega sklepa je prišel tudi Joachim Jungius (1587–1657) in to tudi potrdil z eksperimentom. Ko je bil na voljo infinitezimalni račun, so se s problemom oblike verižnice na pobudo Jakoba Bernoullija (1654–1705) spoprijeli Johann Bernoulli (1667–1748), David Gregory (1659–1708) in Gottfried W. Leibniz (1646–1716). Prišli so do ugotovitve, da je verižnica del grafa funkcije $x \mapsto a \operatorname{ch}(x/a)$. Robert Hooke (1635–1703) je raziskoval trdnostne lastnosti obokov, ki imajo v preseku obliko narobe obrnjene verižnice. V gradbeništvu so take oboke izdelovali že veliko prej. Baje je angleško besedo za verižnico, *catenary*, predlagal Thomas Jefferson (1743–1826), tretji predsednik ZDA. Beseda temelji na latinski *catena*, kar pomeni *veriga*. Raziskovali so tudi nehomogene, raztegljive, vrteče se in druge verižnice.

Običajno pridemo do enačbe verižnice z uporabo načela, da se prosto obešena idealna veriga umiri tako, da je njeno težišče najnižje (Bernoullijevo načelo statike). Ravnina, v kateri je verižnica, je navpična. Do enakega rezultata pridemo, če uporabimo načelo, ki pove, da se veriga umiri tako, da je njena potencialna energija najmanjša (Hamiltonovo načelo). Eno in drugo pa zahteva znanje *variacijskega računa*, zlasti reševanje *vezanih, izoperimetričnih variacijskih nalog* (več o tem je napisanega na primer v [2, 4, 5]).

Običajna verižnica nastane ob predpostavki, da je potencialna energija točkaste mase sorazmerna z njeno višino nad izbrano vodoravno ravnino in da je celotna verižnica v homogenem gravitacijskem polju, kjer je pospešek prostega pada v območju verižnice povsod enak. To je zelo natančno res, dokler so razsežnosti verižnice zelo majhne v primerjavi s polmerom Zemlje, na kateri verižnico realiziramo. Če pa bi realizirali verižnico ogromne dolžine in jo obesili zelo visoko, pa bi morali upoštevati pojemanje pospeška prostega pada z višino. Tako verižnico si je zamislil že Johann Bernoulli in najbrž še kdo. Ni pa splošno znano, do katerih rezultatov so prišli.

Pokojni prof. Egon Zakrajšek (1941–2002) se je ukvarjal z različnimi, običajno težjimi matematičnimi nalogami, tudi z verižnico. O tej je predaval na Sredinem seminarju nekaj let pred svojo prezgodnjo smrtjo. Na koncu ga je nekdo vprašal, kakšna bi bila zelo dolga in zelo visoko obešena verižnica v zemeljskem gravitacijskem polju. Profesor se je samo prijazno nasmehnil. Toda razvoj znanosti je prinesel fullerene in ogljikove nanocevkke. Ko je prof. Denis Arčon, Zoisov nagrajenec za vrhunske znanstvene in razvojne dosežke na področju fizike, v okviru občnega zbora in 60-letnice DMFA Slovenije novembra 2009 na Bledu predaval o fulerenih in nanocevkah, je povedal tudi morda nekoliko futuristično zamisel, da bi z nanocevkami, ki imajo primerne fizikalne lastnosti, povezali med seboj zelo oddaljene točke na Zemlji in v vesolju. Ob tem se je morda marsikomu porodila misel o ogromnih verižnicah, pri katerih je treba upoštevati nehomogenost gravitacijskega polja.

Iskanje po literaturi pa je pokazalo, da sta se s problemom *prave verižnice*, to je verižnice v radialnem gravitacijskem polju, že pred letom 2000 temeljito ukvarjala Jochen Denzler in Andreas M. Hinz ter leta 1999 objavila članek [1]. V pričujočem prispevku bomo do prave simetrične verižnice prav tako prišli z variacijskim računom kot pravkar omenjena avtorja, dobljeno diferencialno enačbo pa bomo reševali nekoliko drugače.

Matematična formulacija problema

Zamislimo si verižnico v gravitacijskem polju

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad r = |\vec{r}| > 0,$$

kjer je G splošna gravitacijska konstanta in M masa Zemlje ali kakega drugega planeta, na katerem bi verižnico realizirali. Polje \vec{F} je potencialno:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}U(\vec{r}), \quad U(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}.$$

Privlačno središče je v točki O , ki ustreza vektorju $\vec{r} = \vec{0}$. Privlačno središče lahko nadomestimo tudi s kroglo polmera R in središčem v točki O , pri čemer je masna gostota krogle odvisna le od r . Takrat obravnavamo verižnico, če je le-ta v celoti v tistem prostorskem območju, kjer velja $r > R$.

Verižnica naj bo dolga 2ℓ in homogena, to se pravi, da je njena krivuljska masna gostota $\rho = dm/ds$ konstantna. Pri tem je ds diferencial ločne dolžine. Ukvarjali se bomo z najpreprostejšim primerom, ko ima verižnica krajišči v različnih točkah A_- in A_+ , ki sta na enaki, dovolj veliki razdalji od točke O . Tedaj je iskana krivulja simetrična, kar olajša računanje. Simetričnost verižnice sledi iz načela njene minimalne potencialne energije. Posledica tega načela je tudi ta, da verižnica leži v ravnini, ki jo določajo točke A_- , A_+ in O , ter konveksnost verižnice, gledano iz točke O . Celotna verižnica je v trikotniku OA_-A_+ . Nesimetrično verižnico obravnavata avtorja v [1].

Za udobno računanje vpeljemo polarni koordinatni sistem s polom v točki O in polarno osjo, ki je pravokotna na daljico A_-A_+ , kakor kaže slika 1. Polarna kota točk A_- in A_+ sta potem ustrezno $-\alpha$ in α . Smiselno je vzeti naravno omejitev $0 < \alpha < \pi/2$. Polarna radija obeh točk sta enaka r_1 . V polarnih koordinatah lahko zapišemo: $A_{\pm}(r_1, \pm\alpha)$.

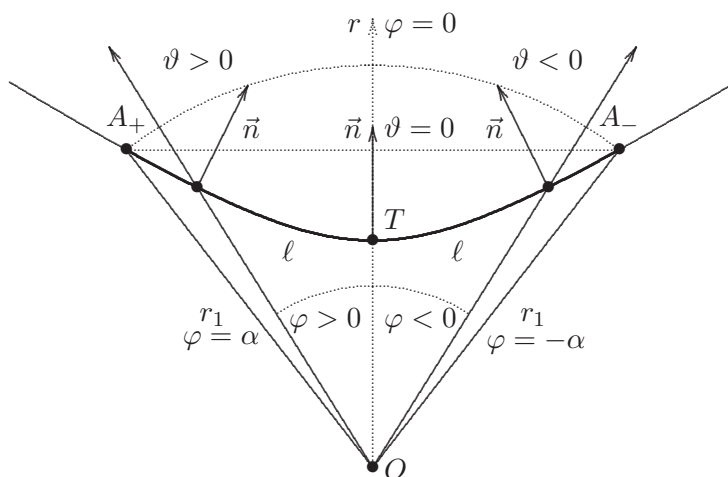
Enačbo verižnice bomo iskali v polarnih koordinatah: $r = r(\varphi)$. Njena celotna potencialna energija je

$$W_p[r] = -GM\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (1)$$

pri pogoju

$$\mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = 2\ell. \quad (2)$$

Pri tem smo uporabili izraz za diferencial loka krivulje $r = r(\varphi)$ v polarnih koordinatah in označili $r' = dr/d\varphi$ ter upoštevali, da ima infinitezimalno majhna masa dm na razdalji r od točke O potencialno energijo $-GM dm/r$. Iščemo tako pozitivno in odvedljivo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, definirano na intervalu $[-\alpha, \alpha]$, ki minimizira integral (1) pri pogoju (2) in z dodatkom $r(\pm\alpha) = r_1$. Graf rešitve, ekstremalo v polarnih koordinatah, bomo imenovali *prava simetrična verižnica*. Na njej doseže polarni radij minimum v točki $T(r_0, 0)$. Pri tem je $R \leq r_0 < r_1$.



Slika 1. Prava simetrična verižnica.

Dolžina 2ℓ verižnice med točkama A_- in A_+ zadošča naravnim pogojem (slika 1): tetiva A_-A_+ krožnice $r = r_1$ mora biti krajša kot 2ℓ , kar pa mora biti manj od $2r_1$, iz česar sledi naravna omejitev:

$$r_1 \sin \alpha < \ell < r_1. \quad (3)$$

Brez škode za splošnost lahko rešujemo nalogo tako, da vzamemo $GM\varrho = -1$ in iščemo ekstremalo funkcionala

$$\mathcal{F}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (4)$$

pri pogojih

$$\mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = 2\ell, \quad r(\pm\alpha) = r_1. \quad (5)$$

Gre torej za tipičen vezan problem variacijskega računa. Reševanje nas spominja na Lagrangeevo metodo iskanja vezanih ekstremov pri funkcijah več spremenljivk. Uporabimo izrek, ki ga je utemeljil Lazar A. Ljusternik (1899–1981). Več o Ljusternikovem izreku najdemo na primer v [2, 4, 5]. Sestavimo funkcional

$$\mathcal{L}[r] = \mathcal{F}[r] - \lambda \mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} - \lambda \sqrt{r^2 + r'^2} \right) d\varphi, \quad (6)$$

kjer je λ neka realna konstanta. Vpeljemo

$$f(r, r', \varphi) = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} - \lambda \sqrt{r^2 + r'^2} = \left(\frac{1}{r} - \lambda \right) \sqrt{r^2 + r'^2} \quad (7)$$

in nastavimo potreben pogoj za ekstrem funkcionala (6), to je Euler-Lagrangeeva diferencialna enačba drugega reda:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) - \frac{\partial f}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

S problemom, ali dobljena rešitev zares minimizira funkcional \mathcal{F} , se tukaj ne bomo ubadali, zanesli se bomo pač na fizikalno vsebino naloge.

Ker spremenljivka φ v (7) eksplicitno ne nastopa, lahko diferencialni enačbi (8) takoj znižamo red (glej na primer [2, enačba (10), str. 365]):

$$f(r, r') - r' \frac{\partial f}{\partial r'}(r, r') = -c. \quad (9)$$

Pri tem je c integracijska konstanta. V našem primeru dobimo najprej iz (9)

$$\left(\frac{1}{r} - \lambda \right) \left(\sqrt{r^2 + r'^2} - \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) = -c.$$

in po poenostavitvi:

$$r(\lambda r - 1) = c \sqrt{r^2 + r'^2}. \quad (10)$$

Poglejmo še, kakšni sta lahko konstanti c in λ , ki pri naših pogojih obstajata po Ljusternikovem izreku. Očitno je $c \neq 0$. Za $\lambda = 0$ pa bi dobili diferencialno enačbo $cr' = \pm r \sqrt{1 - c^2}$ in za $|c| < 1$ bi imeli za rešitev logaritmsko spiralo, kar pa spet ne gre. Torej bomo v nadaljevanju privzeli pogoja $c \neq 0$ in $\lambda \neq 0$.

Reševanje problema

Omenili smo že, da sta J. Denzler in A. M. Hinz v [1] problem reševala drugače. V enačbo (10) sta vpeljala novo funkcijo $\rho(\varphi) = 1/r(\varphi)$, ki nam enačbo poenostavi. Po odpravi korena in odvajanju dobimo namreč preprosto nehomogeno linearno enačbo s konstantnimi koeficienti, ki jo zlahka rešimo. Vsemu navkljub pa se bomo naloge lotili po nekoliko daljši, morda celo naravnejši poti.

Označimo s ϑ orientirani kot od zunanje normale na krivuljo do podaljška polarnega radija r (slika 1). Iskali bomo ekstremalo, ki je konveksna, gledano iz točke O . Zato mora kot ϑ zvezno naraščati od negativnih na pozitivne vrednosti, ko kot φ narašča od $-\alpha$ proti α .

Znano je (glej na primer [3, enačba (5), str. 439]), da velja enakost $\operatorname{tg} \mu = r/r'$, če je μ kot med polarnim radijem in tangento krivulje. Zato je $r' = r \operatorname{tg} \vartheta$. Iz enačbe (10) dobimo $\lambda r - 1 = c/\cos \vartheta$ in

$$r = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{c}{\cos \vartheta} \right). \quad (11)$$

Iz enakosti

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

hitro sledi

$$\frac{c \sin \vartheta}{\lambda \cos^2 \vartheta} = \frac{d\varphi}{d\vartheta} \cdot r \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d\varphi}{d\vartheta} \operatorname{tg} \vartheta \left(1 + \frac{c}{\cos \vartheta} \right)$$

in po preureditvi

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{c}{c + \cos \vartheta}. \quad (12)$$

S tem imamo povezavo med kotoma φ in ϑ , in sicer

$$\varphi = c \int_0^{\vartheta} \frac{d\theta}{c + \cos \theta}, \quad (13)$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\varphi = 0$, ko je $\vartheta = 0$, kar je posledica minimalnosti polarnega radija r v temenu T in enačbe $r' = r \operatorname{tg} \vartheta$. Funkciji (11) in (13) nam določata družino ekstremal v polarni parametrični obliki. Toda s tako obliko nismo popolnoma zadovoljni, kajti radi bi izločili kot ϑ in dobili eksplisitni izraz $r = r(\varphi)$.

Preprost rezultat, ki nam bo obenem povedal predznak konstante c , dobimo za ukrivljenost κ iskane krivulje po formuli

$$\kappa = \frac{rr'' - r'^2 - 2r'^2}{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}. \quad (14)$$

Pri tem upoštevamo $r' = r \operatorname{tg} \vartheta$ in (12). Najprej izračunamo

$$r'' = r' \operatorname{tg} \vartheta + \frac{r}{\cos^2 \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{d\varphi} = r \operatorname{tg}^2 \vartheta + \frac{r}{\cos^2 \vartheta} \left(1 + \frac{\cos \vartheta}{c} \right),$$

nato pa po poenostavitvi dobimo:

$$\kappa = \frac{\cos^2 \vartheta}{cr}.$$

Krožnica $r = a$ ($a > 0$) je konkavna, gledano iz točke O , njena ukrivljenost pa je po (14) enaka $-1/a$, torej negativna. Iskana ekstremala pa je, gledano iz točke O , konveksna in mora zato imeti po (14) pozitivno ukrivljenost na celotnem intervalu $[-\alpha, \alpha]$. To pomeni, da je $c > 0$, iz (11) pa sklepamo, da je tudi $\lambda > 0$.

Integral (13) računamo z univerzalno substitucijo $\tau = \operatorname{tg}(\theta/2)$, ki nam da $\cos \theta = (1 - \tau^2)/(1 + \tau^2)$, $d\theta = 2 d\tau/(1 + \tau^2)$ in

$$\varphi = 2c \int_0^t \frac{d\tau}{(c-1)\tau^2 + (c+1)}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (15)$$

Brez težav iz (11) in (12) izrazimo za ekstremalo diferencial loka:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}.$$

Z integracijo dobimo še dolžino $s(\varphi)$ ekstremale med njenim temenom in točko, ki ustreza polarnemu kotu φ :

$$s(\varphi) = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\vartheta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{c}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \frac{cr'(\varphi)}{\lambda r(\varphi)} = -cr(\varphi) \left(\frac{1}{\lambda r} \right)'(\varphi). \quad (16)$$

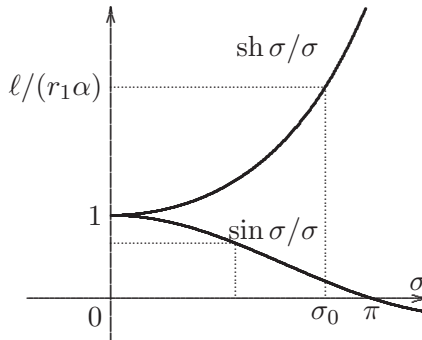
Rezultat (16) je pomemben pri določevanju konstante c pri dani dolžini ℓ in danem kotu α .

Iz oblike integranda v (15) razberemo, da se kot φ izraža s funkcijo $\operatorname{ar th}$ v primeru $0 < c < 1$ in s funkcijo $\operatorname{arc tg}$ v primeru $c > 1$. Primer $c = 1$

je posebno lep, ker nam da preprost rezultat: $\varphi = t = \operatorname{tg}(\vartheta/2)$. Sedaj si oglejmo vse tri možnosti, ki dejansko pridejo v poštev pri omejitvi (3).

A. Najprej se vprašajmo, ali obstaja pri omejitvi (3) rešitev, v kateri je $0 < c < 1$. Tedaj dobimo iz (15):

$$\varphi = \frac{2c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{ar th} \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} t, \quad t = \sqrt{\frac{1+c}{1-c}} \operatorname{th} \frac{\varphi \sqrt{1-c^2}}{2c}. \quad (17)$$



Slika 2. Parameter σ_0 reši enačbo $\operatorname{sh} \sigma/\sigma = \ell/(r_1\alpha)$ oziroma $\sin \sigma/\sigma = \ell/(r_1\alpha)$.

Iz izraza (11) izpeljemo

$$\frac{1}{\lambda r} = \frac{\cos \vartheta}{c + \cos \vartheta} = \frac{1 - t^2}{(1 + c) - (1 - c)t^2},$$

nato pa iz (16) in (17) sledi po krajšem računu

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1 - c \operatorname{ch}(\varphi \sqrt{1-c^2}/c)}{1 - c^2}, \quad s(\varphi) = r(\varphi) \frac{c \operatorname{sh}(\varphi \sqrt{1-c^2}/c)}{\sqrt{1-c^2}}. \quad (18)$$

Iz pogojev $s(\alpha) = \ell$ in $r(\alpha) = r_1$ dobimo iz druge relacije v (18) enačbo

$$\ell = r_1 \frac{c \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{1-c^2}/c)}{\sqrt{1-c^2}},$$

v katero za lažjo obravnavo vpeljemo novo neznanko

$$\sigma = \alpha \sqrt{1-c^2}/c \neq 0, \quad (19)$$

tako da dobimo transcendentno enačbo

$$\frac{\ell}{r_1 \alpha} = \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\sigma}. \quad (20)$$

Iz poteka funkcije $\sigma \mapsto \operatorname{sh} \sigma / \sigma$, ki je namreč večja kot 1 in naraščajoča za pozitivne σ (slika 2), razberemo, da ima enačba (20) natanko eno rešitev $\sigma_0 > 0$ pri pogojih $0 < \alpha < 1$, $r_1 \alpha < \ell < r_1$. Enačbo (20) seveda rešujemo v konkretnem primeru numerično, za kar je na voljo precej metod. Ko izračunamo σ_0 , dobimo iz (19) natanko določeno konstanto $c = \alpha / \sqrt{\alpha^2 + \sigma_0^2}$, ki očitno zadošča pogoju $0 < c < 1$. Iskana krivulja je tedaj določena z relacijo

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1 - c \operatorname{ch}(\sigma_0 \varphi / \alpha)}{1 - c^2}.$$

Ker je

$$\frac{1}{\lambda r_1} = \frac{1 - c \operatorname{ch} \sigma_0}{1 - c^2},$$

s čimer je določena tudi konstanta λ , dobimo nazadnje za rešitev:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - c \operatorname{ch} \sigma_0}{1 - c \operatorname{ch}(\sigma_0 \varphi / \alpha)}, \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma_0^2}}. \quad (21)$$

B. Nato pogledjmo, ali obstaja pri omejitvi (3) rešitev, v kateri je $c > 1$. Podobno kot v primeru **A** dobimo iz (15):

$$\varphi = \frac{2c}{\sqrt{c^2 - 1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} t, \quad t = \sqrt{\frac{c+1}{c-1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi \sqrt{c^2 - 1}}{2c}. \quad (22)$$

Iz izraza (11) izpeljemo

$$\frac{1}{\lambda r} = \frac{\cos \vartheta}{c + \cos \vartheta} = \frac{1 - t^2}{(c+1) + (c-1)t^2},$$

nato pa iz (16) in (22) sledi po krajšem računu

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1 - c \cos(\varphi \sqrt{c^2 - 1}/c)}{1 - c^2}, \quad s(\varphi) = r(\varphi) \frac{c \sin(\varphi \sqrt{c^2 - 1}/c)}{\sqrt{c^2 - 1}}. \quad (23)$$

Iz pogojev $s(\alpha) = \ell$ in $r(\alpha) = r_1$ dobimo iz druge relacije v (23) enačbo

$$\ell = r_1 \frac{c \sin(\alpha \sqrt{c^2 - 1}/c)}{\sqrt{c^2 - 1}},$$

v katero za lažjo obravnavo vpeljemo novo neznanke

$$\sigma = \alpha \sqrt{c^2 - 1}/c \neq 0 \quad (24)$$

in dobimo transcendentno enačbo

$$\frac{\ell}{r_1\alpha} = \frac{\sin \sigma}{\sigma}. \quad (25)$$

Iz poteka funkcije $\sigma \mapsto \sin \sigma / \sigma$, ki je namreč manjša kot 1 in padajoča za $0 < \sigma < \pi$ (slika 2), razberemo, da ima tudi enačba (25) natanko eno rešitev σ_0 pri pogojih $0 < \alpha < \pi/2$, $r_1 \sin \alpha < \ell < r_1\alpha$. Očitno velja relacija $\sin \alpha / \alpha < \sin \sigma_0 / \sigma_0$, iz česar sledi $\sigma_0 < \alpha$. Ko izračunamo σ_0 , dobimo iz (24) natanko določeno konstanto $c = \alpha / \sqrt{\alpha^2 - \sigma_0^2}$, ki očitno zadošča pogoju $c > 1$. Iskana krivulja je tedaj določena z relacijo

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1 - c \cos(\sigma_0 \varphi / \alpha)}{1 - c^2}.$$

Ker je

$$\frac{1}{\lambda r_1} = \frac{1 - c \cos \sigma_0}{1 - c^2},$$

s čimer je določena tudi konstanta λ , dobimo nazadnje za rešitev naše naloge krivuljo:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - c \cos \sigma_0}{1 - c \cos(\sigma_0 \varphi / \alpha)}, \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma_0^2}}. \quad (26)$$

C. V najenostavnejšem primeru $c = 1$ lahko pridemo do rezultata za $1/(\lambda r(\varphi))$ tudi z limitnim preходом iz primerov $c \neq 1$, na primer:

$$\lim_{c \rightarrow 1+0} \frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \lim_{c \rightarrow 1+0} \left(\frac{1-c}{1-c^2} - \frac{\varphi^2}{2c} + \frac{(c^2-1)\varphi^4}{4!c^3} - \dots \right) = \frac{1-\varphi^2}{2}.$$

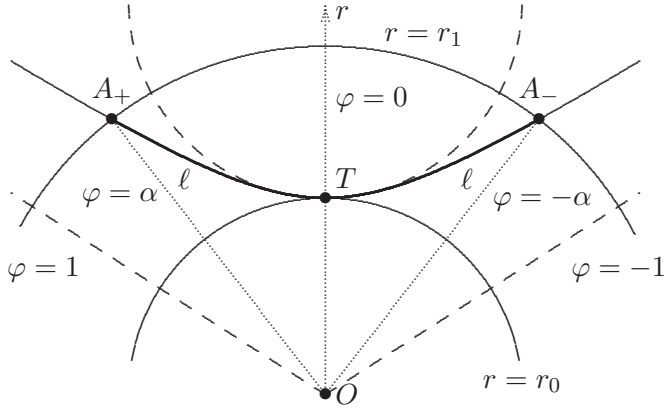
Pri tem smo uporabili razvoj funkcije \cos v potenčno vrsto. Za $c = 1$ je zato

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1-\varphi^2}{2}$$

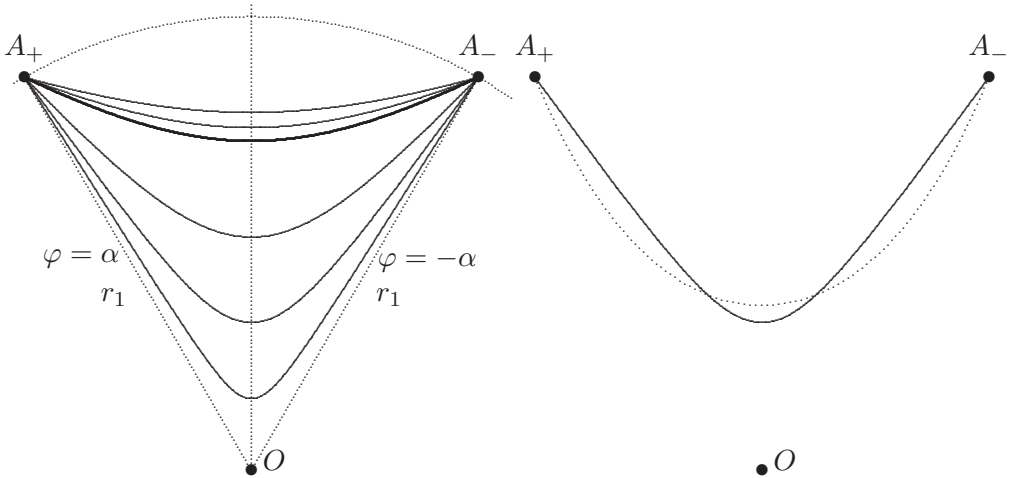
in po (16) še $s(\varphi) = \varphi r(\varphi)$. Ta primer očitno nastopi, če je $\ell = r_1\alpha$ in $0 < \alpha < 1$, kajti tedaj velja $s(\alpha) = r(\alpha)\alpha$. V tem mejnem primeru je parameter λ določen z relacijo $1/(\lambda r_1) = (1 - \alpha^2)/2$ in iskana krivulja je

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - \alpha^2}{1 - \varphi^2}. \quad (27)$$

Prava simetrična verižnica



Slika 3. Prava verižnica $r(\varphi) = r_0/(1 - \varphi^2)$ s krivinskim krogom v temenu T .



Slika 4. Prave verižnice (levo) in primerjava ene od njih s klasično (desno).

Ukrivljenost rešitve v temenu T je v vsakem primeru $\kappa = 1/(cr_0)$ in krivinski polmer je tam cr_0 , kjer je $r_0 = r(0)$.

Slika 4 na levi strani kaže prave simetrične verižnice različnih dolžin skozi isti točki. Krepkeje je načrtana tista, za katero je $\ell = r_1\alpha$ ($c = 1$) in se njen polarni radij izraža racionalno s kotom φ . Nad njo so verižnice, za katere je $r_1 \sin \alpha < \ell < r_1\alpha$ ($c > 1$) in se njihov polarni radij izraža s funkcijo \cos , pod njo pa verižnice, za katere je $r_1\alpha < \ell < r_1$ ($0 < c < 1$) in se njihov

polarni radij izraža s funkcijo ch . Parameter $c > 0$ na sliki se manjša od zgoraj navzdol.

Na desni strani slike pa je s polno črto narisana prava verižnica, s pikčasto pa klasična verižnica enake dolžine.

Glavni rezultat in sklep

Če se ne oziramo na velikost planeta, na katerem realiziramo prave simetrične verižnice, so njihove enačbe za $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ take:

A. Za $0 < \alpha < 1$, $r_1\alpha < \ell < r_1$:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - c \operatorname{ch} \sigma_0}{1 - c \operatorname{ch}(\sigma_0 \varphi / \alpha)}, \quad \frac{\operatorname{sh} \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{\ell}{r_1 \alpha}, \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma_0^2}}.$$

B. Za $0 < \alpha < \pi/2$, $r_1 \sin \alpha < \ell < r_1 \alpha$:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - c \cos \sigma_0}{1 - c \cos(\sigma_0 \varphi / \alpha)}, \quad \frac{\sin \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{\ell}{r_1 \alpha}, \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma_0^2}}.$$

C. Za $\ell = r_1 \alpha$, $\alpha < 1$:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - \alpha^2}{1 - \varphi^2}, \quad c = 1.$$

Če bi katerokoli verižnico po zgornjih enačbah nadaljevali prek krajišč A_{\pm} , bi se bližala asimptotama, ki sta vzporedni poltrakoma

$$\varphi = \pm(\alpha/\sigma_0) \operatorname{ar ch}(1/c)$$

oziroma

$$\varphi = \pm(\alpha/\sigma_0) \operatorname{arc cos}(1/c)$$

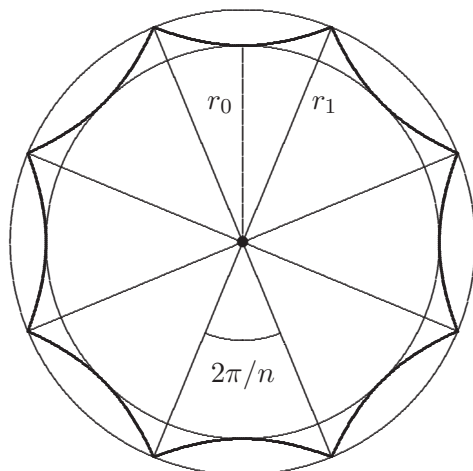
oziroma

$$\varphi = \pm 1.$$

Da se izračunati, kje se asimptoti v posameznem primeru sekata, vendar dobimo precej zapletene izraze. Zato končajmo računanje samo še z eno zanimivostjo.

Za vsako naravno število $n \geq 4$ zlahka sestavimo sklenjeno verigo pravih, najenostavnejših verižnic (27), če vzamemo $\alpha = \pi/n < 1$. Skupna dolžina

Prava simetrična verižnica



Slika 5. Sklenjena veriga pravih verižnic.

sklenjene verige je $2\pi r_1$, kar je enako obsegu njenega očrtanega kroga. Polmer včrtanega kroga pa je $r_0 = r_1(1 - \alpha^2)$ (slika 5).

Našli smo enačbo prave simetrične verižnice v radialnem gravitacijskem polju. Uporabili smo mehansko načelo najmanjše potencialne energije, infinitezimalni in variacijski račun, pa tudi numerično reševanje enačb nam je prišlo prav. Vsekakor je zanimivo primerjati klasične in prave verižnice v konkretnih primerih (slika 4).

LITERATURA

- [1] J. Denzler, A. M. Hinz, *Catenaria Vera – The True Catenary*, Expo. Math. **17** (1999), str. 117–142.
- [2] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.
- [3] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.
- [4] I. Vidav, *Višja matematika III*, DZS, Ljubljana, 1976.
- [5] E. Zakrajšek, *Analiza III*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2002.