

Übungsblatt 9

Alle Antworten sind zu begründen.

Aufgabe 33

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) := \sup\{f(t) : a \leq t \leq x\}.$$

Zeigen Sie, dass g stetig ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 34

Für $c \in \mathbb{C}$ definieren wir die Abbildung

$$f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \quad f_c(z) := z^2 + c.$$

Ferner sei $f_c^1 := f_c$ und $f_c^{n+1} := f_c \circ f_c^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Außerdem definieren wir die Menge

$$M := \{c \in \mathbb{C} : (f_c^n(0))_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.}\}.$$

(a) Sei $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $|c| > 2$ impliziert

$$|f_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{2^{n-2}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

(b) Beweisen Sie die folgende Identität

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \sup\{|f_c^n(0)| : n \in \mathbb{N}\} \leq 2\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Menge M kompakt ist.

(3+4+3 Punkte)

Aufgabe 35

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv. f soll außerdem die Zwischenwerteigenschaft auf I haben, d.h. für alle $a, b \in I, a < b$ gilt, dass f im Intervall (a, b) alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

a) Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

b) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(5+5 Punkte)

Aufgabe 36

a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \text{ rational,} \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt in $\mathbb{R}$ unstetig ist.

b) Sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{1}{q}, & x \text{ rational mit der gekürzten Form } \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g auf den irrational Zahlen in $[0, 1]$ stetig ist, und dass g unstetig auf den rational Zahlen in $[0, 1]$ ist.

(5+5 Punkte)

Abgabe: Bis Montag, 21.12.2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.