Mathematisches Institut der LMU
Priv. Doz. Dr. Peter Philip
David Müller und Michael Handrek

Analysis einer Variablen
WiSe 2015/16
03. 12. 2015

Übungsblatt 8

*Alle Antworten sind zu **begründen**.*

Aufgabe 29
Bestimmen Sie, ob die Folge in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$ in (e)) konvergiert und geben Sie alle Häufungspunkte an.
(a) $a_n := \sqrt{25n^2 + 2n + 1} - 5n, \quad n \in \mathbb{N};$
(b) $b_n := \frac{13^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N};$
(c) $c_n := \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad n \in \mathbb{N};$
(d) $d_n := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad n \in \mathbb{N};$
(e) $e_n := (-\mathrm{i})^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$ (*2+2+2+2+2 Punkte*)

Aufgabe 30
Sei $0 \leq \Delta < 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $a < b$. Wir betrachten eine Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ mit der Eigenschaft

$$|f(x) - f(y)| \leq \Delta |x - y|,$$

für alle $x, y \in [a, b]$. Außerdem definieren wir für einen beliebigen Punkt $x_1 \in [a, b]$ eine rekursive Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $x_* \in [a, b]$ konvergiert und $f(x_*) = x_*$.
Gibt es ein $\tilde{x} \in [a, b] \setminus \{x_*\}$, sodass $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$?
Hinweis: Verwenden Sie Theorem 7.29. (*10 Punkte*)

Aufgabe 31
Sei $n \in \mathbb{N}$.
(a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung von n beschränkten Teilmengen aus $\mathbb{C}$ wieder beschränkt ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung von n abgeschlossenen Teilmengen aus $\mathbb{C}$ wieder abgeschlossen ist.
(c) Zeigen Sie, dass die Vereinigung von n kompakten Teilmengen aus $\mathbb{C}$ wieder kompakt ist.
(*4+4+2 Punkte*)

Aufgabe 32
Finden Sie durch direkte Anwendung der ϵ-δ-Definition Bereiche von Stetigkeit und Unstetigkeit der Funktionen
a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2, x < 0 \\ x, \ x \geq 0 \end{cases},$$

b)

$$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto g(x) := \begin{cases} 0, x < \pi \\ 1, x > \pi \end{cases},$$

c)

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) := \begin{cases} x^2, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0, \text{sonst} \end{cases}.$$

(*3+3+4 Punkte*)

Abgabe: Bis Montag, 14. 12. 2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.