Übungsblatt 6

Alle Antworten sind zu begründen.

Aufgabe 21

Nach P21 besitzt der geordnete Körper der reellen Zahlen folgende Eigenschaften:

(E1) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

(E2) Seien A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \cup B = \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in A$ und $y \in B$ gilt $x < y$. Dann gibt es genau ein $s \in \mathbb{R}$, sodass für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a \leq s \leq b$.

(a) Zeigen Sie, dass (E1) aus (E2) folgt.

(b) Zeigen Sie, dass (E2) das Theorem 4.8 impliziert, ohne (E1) und (a) zu verwenden. (6+4 Punkte)

Aufgabe 22

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene.

(a) $M_a := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - \operatorname{Re}(z)\}$,

(b) $M_b := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) > 0, 1 < |z-i| + |z|\}$,

(c) $M_c := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right| < 1\right\}$ für $a \in \mathbb{C}$ und $|a| < 1$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst

$$|1 - z\bar{a}|^2 - |z - a|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |a|^2)$$

und folgern Sie daraus eine a -unabhängige Darstellung von M_c .

(2+4+4 Punkte)

Aufgabe 23

a) Beweisen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{j=0}^k \binom{\alpha + j}{j} = \binom{\alpha + k + 1}{k}$$

b) Seien $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$. Zeigen Sie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

c) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$ gilt:

$$\#\mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\}) = \binom{n}{k}$$

wobei $\mathcal{P}_k(A)$ die Menge aller k -elementigen Teilmengen von einer Menge A ist.

(3+3+4 Punkte)

Aufgabe 24

a) Bestimmen Sie alle Polynome P über $\mathbb{R}$, für die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(x+y) = P(x) + P(y).$$

b) Bestimmen Sie alle Polynome Q über $\mathbb{R}$, für die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} Q(0) &= 0 \\ Q(n^2 + 1) &= (Q(n))^2 + 1. \end{aligned}$$

(5+5 Punkte)

Abgabe: Bis Montag, 30. 11. 2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.