Mathematisches Institut der LMU
Priv. Doz. Dr. Peter Philip
David Müller und Michael Handrek

Analysis einer Variablen
WiSe 2015/16
05. 11. 2015

Übungsblatt 4

Alle Antworten sind zu ***begründen***.

Aufgabe 13
Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen und $\mathfrak{X} := \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Wir definieren die Relationen $\leq := \{(M,S) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : M \subseteq S\}$ auf $\mathcal{P}(X)$ und $\leq_{\mathfrak{X}} := \leq \cap (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ auf $\mathfrak{X}$.
(a) Zeigen Sie, dass $\leq$ auf $\mathcal{P}(X)$ eine Partialordnung ist aber keine Totalordnung; und begründen Sie, dass dies impliziert, dass $\leq_{\mathfrak{X}}$ eine Partialordnung auf $\mathfrak{X}$ ist.
(b) Wir betrachten $\mathcal{P}(X)$ versehen mit der Relation $\leq$. Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass

$$\sup(M) = \bigcup_{m \in M} m$$

und geben Sie einen analogen Ausdruck für $\inf(M)$ an.
(c) Wir betrachten $\mathfrak{X}$ versehen mit der Relation $\leq_{\mathfrak{X}}$. Es seien A und B nichtleere, disjunkte Teilmengen von X und $C := \{A, B\}$. Entscheiden Sie, ob das Supremum bzw. Maximum von C existieren und bestimmen Sie dieses gegebenenfalls. Klären Sie abschließend, ob C nach unten beschränkt ist.
(*3+4+3 Punkte*)

Aufgabe 14
Sei $\leq$ eine Partialordnung auf der nichtleeren Menge X und $A, B \subseteq X$. Nehmen Sie an, dass $\sup(A)$, $\sup(B)$ und $\sup(A \cup B)$ existieren.
(a) Nehmen Sie zusätzlich an, dass $\sup(\{\sup(A), \sup(B)\})$ existiert. Zeigen Sie, dass

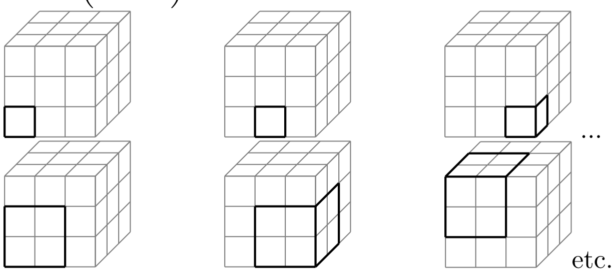
$$\sup(A \cup B) = \sup(\{\sup(A), \sup(B)\}).$$

(b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass $\leq$ eine Totalordnung ist. Zeigen Sie, dass

$$\sup(A \cup B) = \max(\{\sup(A), \sup(B)\}).$$

(*7+3 Punkte*)

Aufgabe 15
Wir betrachten Würfel mit Seitenlänge $n \in \mathbb{N}$, die aus n^3 Enheitswürfeln zusammengebaut sind. Beweisen Sie durch Induktion, dass die Anzahl aller $k \times k \times k, k \in \mathbb{N}, k \leq n$ Würfel innerhalb des großen Würfels durch $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ gegeben ist.



Hinweis: Machen Sie sich zunächst die Anzahl der Würfel für $n = 1, 2, 3, 4$ klar. (*10 Punkte*)

Aufgabe 16
Auf dem Schulhof lässt ein Lehrer seine Schüler mit grünen und weißen Murmeln spielen. Jeder Schüler bekommt am ersten Schultag eine Schüssel mit 15 grünen und 12 weißen Murmeln. Die Schüler müssen gut auf ihre Murmeln aufpassen, denn sie können jeden Tag nur entweder 3 grüne gegen 2 weiße tauschen, oder auf einmal alle grünen gegen weiße und alle weiße gegen grüne Murmeln tauschen. (hat die Schülerin oder der Schüler m grüne und n weiße Murmeln, so hat sie oder er danach n grüne und m weiße Murmeln) Der Lehrer verspricht den Schülern, dass jeder, der genau 5 grüne und 5 weiße Murmeln besitzt (und keine Murmeln verloren hat), ein Stück Erdbeertorte bekommt.
Zeigen Sie durch Induktion über den Schultag, dass niemand (außer dem Lehrer) ein Stück Erdbeertorte bekommt.
Hinweis: Betrachten Sie die Differenz der grünen und weißen Murmeln. (*10 Punkte*)

Abgabe: Bis Montag, 16. 11. 2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.