Mathematisches Institut der LMU
Priv. Doz. Dr. Peter Philip
David Müller und Michael Handrek

Analysis einer Variablen
WiSe 2015/16
22. 10. 2015

Übungsblatt 2

Alle Antworten sind zu ***begründen***.

Aufgabe 5
Seien A, B und C Teilmengen von X. Wir definieren

$$A\Theta B := \{x \in X : x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}.$$

Zeigen Sie, dass
(a) $A\Theta A = \emptyset$,
(b) $\emptyset\Theta A = A$,
(c) $A\Theta(B\Theta C) = (A\Theta B)\Theta C$,
(d) $A \cap (B\Theta C) = (A \cap B)\Theta(A \cap C)$. *(1+1+4+4 Punkte)*

Aufgabe 6
Seien A, B Mengen und $E_1(u)$, $E_2(v, w)$, $E_3(u, w), E_4(t, u, v)$ Eigenschaften von $t, u \in A$ und $v, w \in B$. Geben Sie jeweils eine äquivalente Aussage, welche den logischen Operator $\neg$ nicht enthalten darf, für die Negationen folgender Aussagen an
(a) $\forall u \in A\ \exists v \in B\ \forall w \in B\ \big(E_2(v, w) \Rightarrow \neg E_3(u, w)\big)$,
(b) $\forall t, u \in A\ \ (\neg E_1(u) \wedge (\exists v \in B\ \neg E_4(t, u, v)))$. *(5+5 Punkte)*

Aufgabe 7
Betrachten Sie für beliebige nichtleere Mengen A und B und eine beliebige Abbildung $f : A \to B$ die zugehörige *mengenwertige Umkehrabbildung*:

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A) : M \mapsto f^{-1}(M) := \{a \in A | f(a) \in M\}$$

Unter den folgenden Voraussetzungen an f:

(a) die Abbildung f ist surjektiv,

(b) die Abbildung f ist injektiv,

(c) die Abbildung f ist bijektiv,

sollen Sie folgende Eigenschaften von f^{-1} folgern:

- Beweisen oder widerlegen Sie, unter welcher der Vorraussetzungen a),b),c), die Abbildung f^{-1} injektiv ist.
- Beweisen oder widerlegen Sie, unter welcher der Vorraussetzungen a),b),c), die Abbildung f^{-1} surjektiv ist.

(5+5 Punkte)

Aufgabe 8
Seien $g : A \to B$ und $h : B \to C$ Abbildungen auf nichtleeren Mengen A, B und C. Zeigen Sie:
(a) Wenn g und h injektiv sind, so ist $h \circ g : A \to C$ injektiv.
(b) Wenn g und h surjektiv sind, so ist $h \circ g : A \to C$ surjektiv.
(c) Wenn $h \circ g : A \to C$ surjektiv ist, muss h auch surjektiv sein.
(d) Wenn $h \circ g : A \to C$ injektiv ist, muss g auch injektiv sein.
(e) Es existieren g und h, so dass $h \circ g$ surjektiv ist, aber g nicht surjektiv ist.
(f) Es existieren g und h, so dass $h \circ g$ injektiv ist, aber h nicht injektiv ist.
(g) Wenn $h \circ g$ injektiv ist, und g surjektiv ist, dann ist h injektiv und g bijektiv.
(h) Wenn $h \circ g$ surjektiv ist, und h injektiv ist, dann ist g surjektiv und h bijektiv.
(1+1+1+1+1+1+2+2 Punkte)

Abgabe: Bis Montag, 02. 11. 2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.