Mathematisches Institut der LMU
Priv. Doz. Dr. Peter Philip
David Müller und Michael Handrek

Analysis einer Variablen
WiSe 2015/16
14. 01. 2016

Übungsblatt 12

Alle Antworten sind zu ***begründen****.*

Aufgabe 45
Entscheiden Sie, ob für die nachfolgende Funktionenfolge
(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n : \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\} \to \mathbb{C}, \quad a_n(z) := \sum_{k=0}^{n} z^k$;
(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b_n(x) := \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$;
(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad c_n(x) := \left(x + 1/n\right)^2$;
(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d_n(x) := \sum_{k=0}^{n} 2^k \sin\left(3^{-k}x\right)$;
punktweise oder gleichmäßige Konvergenz vorliegt.
Hinweis zu (d): Zeigen und verwenden Sie, dass $|\sin(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *(2+2+2+4 Punkte)*

Aufgabe 46
Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

gilt.
Hinweis: Entwickeln Sie $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ mit dem Binomischen Lehrsatz. *(10 Punkte)*

Aufgabe 47
a) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. *(4 Punkte)*
b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

für alle $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$.
Hinweis: Nutzen Sie wieder die Identität $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = S_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} S_n(b_n - b_{n+1})$ für zwei komplexe Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. *(6 Punkte)*

Aufgabe 48
Zeigen Sie, dass für die Nullstellen der Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion in $\mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin^{-1}\{0\} &= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ \cos^{-1}\{0\} &= \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ \exp^{-1}\{0\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Zeigen Sie außerdem

$$\exp^{-1}\{1\} = \{2k\pi\mathrm{i} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst alle Nullstellen in $\mathbb{R}$ und nutzen Sie dann die Eulerformel um die Lösungen von $\exp(z) = 1$ zu finden und das Ergebnis auf alle Nullstellen in $\mathbb{C}$ zu erweitern. *(10 Punkte)*

Abgabe: Bis Montag, 25. 01. 2015, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.