

Übungsblatt 10

Alle Antworten sind zu **begründen**.

Achtung: Aufgrund der anhaltenden Probleme mit den Rückgabekästen sollen die korrigierten Übungsblätter ab jetzt in den Übungen zurückgegeben werden. Notieren Sie bitte, in welcher Gruppe Sie Ihre korrigierten Übungen abholen wollen.

Aufgabe 37

(a) Zeigen Sie, dass für eine gegen ∞ divergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(b) Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n := \prod_{k=1}^n (1 + b_k), \quad s_n := \sum_{k=1}^n b_k.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie $(\ln(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und verwenden Sie den Aufgabenteil a. (3+7 Punkte)

Aufgabe 38

(a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen und es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = R. \quad (1)$$

Beweisen Sie: Ist $R > 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Gilt $R < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Hinweis: Konstruieren Sie aus der Bedingung (1) für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante ($R > 1$) beziehungsweise eine divergente Minorante ($R < 1$).

(b) Untersuchen Sie unter der Verwendung von Aufgabenteil a die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. (8+2 Punkte)

Aufgabe 39

(a) Geben Sie eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} =: s$ an, welche gegen $\frac{3}{2}s$ konvergiert.

Hinweis:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots + \dots - \dots$$

(b) Geben Sie eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ an, die gegen ∞ divergiert. (6+4 Punkte)

Aufgabe 40

(a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge aller natürlichen Zahlen, die nicht die Ziffernfolge 2016 enthalten, also die Folge 1, 2, ..., 2015, 2017, ..., 20159, 20170, ..., 22015, 22017, Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

konvergiert.

(b) Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge aller natürlichen Zahlen, die die Ziffernfolge 2016 enthalten. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$$

divergiert.

(c) Wir betrachten die Fibonacci-Folge, die uns noch aus Beispiel 3.9. a) vertraut sind. Also die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die rekursiv durch $F_0 := 0, F_1 := 1$ und $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, n > 1$ definiert ist. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $f_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert. (3+2+5 Punkte)

Abgabe: Bis Montag, 11.01.2016, 10:00 Uhr in den Übungskästen 31 bis 34 im 1. Obergeschoss.



FROHE WEIHNACHTEN!