Dr. Ralf Gerkmann
Dr. Leopold Zoller

Wintersemester 2023-24
24.02.2024

Analysis mehrerer Variablen

(Lehramt Gymnasium)

Wiederholungsklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang: ☒ Lehramt Gymnasium
☐ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (4+4+2 Punkte)

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 und $b : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(f,g) = f'(1)g'(1) + f'(2)g'(2)$ für alle $f, g \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass b eine symmetrische Bilinearform auf V ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ von b bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1-x, 2+3x, x^2+1)$.

(c) Entscheiden Sie, ob b positiv definit ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung:

zu (a) Seien $f, g, h \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} b(f+g,h) &= (f+g)'(1)h'(1) + (f+g)'(2)h'(2) = (f'(1)+g'(1))h'(1) + (f'(2)+g'(2))h'(2) \\ &= f'(1)h'(1) + f'(2)h'(2) + g'(1)h'(1) + g'(2)h'(2) = b(f,h) + b(g,h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\lambda f,h) &= (\lambda f)'(1)h'(1) + (\lambda f)'(2)h'(2) = \lambda f'(1)h'(1) + \lambda f'(2)h'(2) \\ &= \lambda(f'(1)h'(1) + f'(2)h'(2)) = \lambda b(f,h) \end{aligned}$$

$$b(f,g) = f'(1)g'(1) + f'(2)g'(2) = g'(1)f'(1) + g'(2)f'(2) = b(g,f) \quad ,$$

und aus diesen Gleichungen folgt auch

$$b(f,g+h) = b(g+h,f) = b(g,f) + b(h,f) = b(f,g) + b(f,h)$$

$$b(f,\lambda h) = b(\lambda h, f) = \lambda b(h,f) = \lambda b(f,h).$$

zu (b) Sei $f(x) = 1-x$, $g(x) = 2+3x$ und $h(x) = x^2+1$. Dann ist $f'(x) = -1$, $g'(x) = 3$, $h'(x) = 2x$ und somit $f'(1) = f'(2) = -1$, $g'(1) = g'(2) = 3$, $h'(1) = 2$ und $h'(2) = 4$. Für die Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ ergeben sich die Einträge

$$a_{11} = b(f,f) = f'(1)^2 + f'(2)^2 = 1+1 = 2 \quad , \quad a_{22} = b(g,g) = g'(1)^2 + g'(2)^2 = 9+9 = 18 \quad ,$$
$$a_{33} = h'(1)^2 + h'(2)^2 = 4+16 = 20 \quad , \quad a_{12} = f'(1)g'(1) + f'(2)g'(2) = (-3)+(-3) = -6 \quad ,$$
$$a_{13} = f'(1)h'(1) + f'(2)h'(2) = (-2)+(-4) = -6 \quad , \quad a_{23} = g'(1)h'(1) + g'(2)h'(2) = 6+12 = 18.$$

Weil die Bilinearform b symmetrisch ist, gilt dasselbe für die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$, und wir erhalten $a_{21} = a_{12} = -6$, $a_{31} = a_{13} = -6$, $a_{32} = a_{23} = 18$. Insgesamt erhalten wir

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -6 \\ -6 & 18 & 18 \\ -6 & 18 & 20 \end{pmatrix}.$$

zu (c) Die konstante Funktion $u(x) = 1$ ist ein Element von V ungleich 0_V. Wäre b positiv definit, müsste $b(u,u) > 0$ gelten. Tatsächlich aber gilt $u'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit $b(u) = u'(1)^2 + u'(2)^2 = 0$. (Man kann natürlich auch überprüfen, dass die Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ das Hurwitz-Kriterium nicht erfüllt.

Name: ____________________

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie durch Überprüfung eines geeigneten Kriteriums nach, dass A ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform ist.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A, und für jeden Eigenwert die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

(c) Geben Sie eine Matrix in $\mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform an, die zu A ähnlich ist. Ein Nachweis ist nicht erforderlich.

Hinweis: Sie brauchen in Teil (c) keine Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ zu bestimmen mit der Eigenschaft, dass TAT^{-1} in Jordanscher Normalform vorliegt. Nach Erledigung von Teil (a) und (b) ist für (c) keine neue Rechnung mehr notwendig.

Lösung:

zu (a) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\chi_A = \det(xE_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x-5 & 0 & -6 \\ -1 & x+1 & -2 \\ -3 & 0 & x+4 \end{pmatrix} =$$

$$(x-5)(x+1)(x+4) + 0 \cdot (-2) \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) \cdot 0$$

$$-3 \cdot (x+1) \cdot (-6) - 0 \cdot (-2) \cdot (x-5) - (x+4) \cdot (-1) \cdot 0$$

$$= (x^2 - 4x - 5)(x+4) + 0 + 0 + 18(x+1) - 0 - 0 = x^3 - 21x - 20 + 18x + 18 = x^3 - 3x - 2.$$

Durch probeweises Einsetzen findet man die Nullstellen -1 und 2. Darüber hinaus ist -1 auch eine Nullstelle der Ableitung $\chi_A' = 3x^2 - 3$. Also ist -1 eine doppelte Nullstelle von χ_A, und insgesamt gilt $\chi_A = (x+1)^2(x-2)$. Das charakteristische Polynom zerfällt also über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren. Laut Vorlesung ist dies äquivalent dazu, dass A ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform ist.

zu (b) Die Eigenwerte von A sind laut Vorlesung die Nullstellen von χ_A. Also folgt aus Teil (a), dass -1 und 2 die beiden Eigenwerte von A sind. An der Zerlegung $\chi_A = (x+1)^2(x-2)$ kann abgelesen werden, dass die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte durch $\mu_a(A,-1) = 2$ und $\mu_a(A,2) = 1$ gegeben sind. Da für jeden Eigenwert λ jeweils $1 \le \mu_g(A,\lambda) \le \mu_a(A,\lambda)$ gilt, erhalten wir $\mu_g(A,2) = 1$ für die geometrische Vielfachheit. Die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt darüber hinaus, dass $\mu_g(A,-1) = \dim \mathrm{Eig}(A,-1) = \dim \ker(A+E) = 3 - \mathrm{rg}(A+E) = 3 - 2 = 1$ gilt zu (c) Eine solche Matrix ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Laut Vorlesung existieren für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{Q}$ in J genau $\mu_g(A, \lambda)$ Jordanblöcke in J, wobei $\mu_a(A, \lambda)$ die Größe des größten Jordanblock zum Eigenwert λ ist. Aus $\mu_g(A, -1) = \mu_g(A, 2) = \mu_a(A, 2) = 1$ und $\mu_a(A, -1) = 2$ folgt somit, dass es zu jedem der beiden Eigenwerte -1 und 2 jeweils genau einen Jordanblock gibt, und dass der Jordanblock zum Eigenwert -1 die Größe 2 und der Jordanblock zum Eigenwert 2 die Größe 1 hat.)

Name: ____________________

Aufgabe 3. (6+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x,y \geq 0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Wir betrachten im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit der Standardmetrik d gegeben durch $d(a,b) = |a - b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Seien $U_1, U_2 \subseteq Y$ gegeben durch $U_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ und $U_2 = Y \setminus \{0\}$. Entscheiden Sie jeweils, ob U_1 bzw. U_2 in Y relativ offen bzw. relativ abgeschlossen ist. (Möglich ist auch jeweils beides, oder keines von beidem.) Eine Begründung ist hier *nicht* erforderlich.

Lösung:

zu (a) Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ sind als Polynomfunktionen stetig, und die (unendlichen) abgeschlossenen Intervalle $]-\infty, 1]$ und $[0, +\infty[$ sind abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{gathered}
(x,y) \in V \quad \Leftrightarrow \quad (x \geq 0) \ \wedge \ (y \geq 0) \ \wedge \ (x^2 + y^2 \leq 1) \quad \Leftrightarrow \\
f(x,y) \in [0, +\infty[\ \wedge \ g(x,y) \in [0, +\infty[\ \wedge \ h(x,y) \in]-\infty, 0] \quad \Leftrightarrow \\
(x,y) \in f^{-1}([0, +\infty[) \ \wedge \ (x,y) \in g^{-1}([0, +\infty[) \ \wedge \ (x,y) \in h^{-1}(]-\infty, 1]) \quad \Leftrightarrow \\
(x,y) \in f^{-1}([0, +\infty[) \cap g^{-1}([0, +\infty[) \cap h^{-1}(]-\infty, 1]).
\end{gathered}$$

Es gilt also $V = f^{-1}([0, +\infty[) \cap g^{-1}([0, +\infty[) \cap h^{-1}(]-\infty, 1])$. Als Urbilder von abgeschlossenen Teilmengen unter stetigen Abbildungen sind $f^{-1}([0, +\infty[)$, $g^{-1}([0, +\infty[)$ und $h^{-1}(]-\infty, 1])$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, somit auch deren Durchschnitt V.

zu (b) Die Teilmenge U_1 ist in Y sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen. Die Teilmenge U_2 ist in Y zwar relativ offen, aber nicht relativ abgeschlossen. (Grund: Die Menge U_1 kann als Durchschnitt von Y mit der offenen Teilmenge $\left]\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right[$ und ebenso als Durchschnitt von Y mit der abgeschlossenen Teilmenge $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ dargestellt werden. Außerdem ist U_2 der Durchschnitt von Y mit der offenen Teilmenge $\left]0, \frac{3}{2}\right[$. Die Menge U_2 ist aber nicht relativ abgeschlossen in Y, denn $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in U_2, die in Y konvergiert. Wäre U_2 relativ abgeschlossen in Y, dann müsste der Grenzwert 0 der Folge ebenfalls in U_2 liegen.)

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (5+5 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{xy}{4x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Geben Sie eine Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ mit $\lim_n(x_n, y_n) = (0, 0)$ und $\lim_n f(x_n, y_n) = 0$ an, und weisen Sie nach, dass die Folge diese Eigenschaften tatsächlich besitzt.

(b) Untersuchen Sie (eventuell mit Hilfe einer weiteren Folge in $\mathbb{R}^2$), ob die Funktion f im Punkt $(0, 0)$ stetig ist.

Lösung:

zu (a) Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_n x_n = \lim_n \frac{1}{n} = 0$ und $\lim_n y_n = \lim_n 0 = 0$ gilt $\lim_n(x_n, y_n) = (0, 0)$, und außerdem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{4x_n^2 + y_n^2} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{4(\frac{1}{n})^2 + 0^2} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 0 \quad = \quad 0.$$

zu (b) Nun betrachten wir die Folgen $((x'_n, y'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x'_n = y'_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_n x'_n = \lim_n y'_n = \lim_n \frac{1}{n} = 0$ gilt $\lim_n(x'_n, y'_n) = (0, 0)$. Diesmal aber erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x'_n y'_n}{4(x'_n)^2 + (y'_n)^2} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{4(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \quad = \quad \frac{1}{5}.$$

Der Grenzwert stimmt nicht mit $f(0, 0) = 0$ überein. Folglich ist f im Nullpunkt unstetig.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (6+4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $f'(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (Hierbei darf ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass f in jedem solchen Punkt total differenzierbar ist.)

(b) Geben Sie die Richtungsableitungen $\partial_{(a,b)} f(1,2)$ im Punkt $(1,2)$ für alle Vektoren $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ an.

Lösung:

zu (a) Die partiellen Ableitungen von f können mit Hilfe der gewöhnlichen Ableitungsregeln bestimmt werden: Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) \quad = \quad \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad = \quad \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\partial_2 f(x,y) \quad = \quad \frac{x(x^2+y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \quad = \quad \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Die Jacobi-Matrix ist also jeweils gegeben durch

$$f'(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

zu (b) Durch Einsetzen von $(x,y) = (1,2)$ in die partiellen Ableitungen erhalten wir $\partial_1 f(1,2) = \frac{1}{25}(8-2) = \frac{6}{25}$ und $\partial_2 f(1,2) = \frac{1}{25}(1-4) = -\frac{3}{25}$. Für alle $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir damit die Richtungsableitung

$$f'(1,2)(a,b) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & -\frac{3}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{6}{25}a - \frac{3}{25}b.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (6+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f.

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f an der Stelle $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ein lokales Minimum besitzt.

Lösung:

zu (a) Die totale Ableitung von f ist gegeben durch $f'(x,y) = (\partial_1 f(x,y)\ \ \partial_2 f(x,y)) = (3x^2 - 3y^2\ \ 4y^3 - 6xy)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Somit ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn $3x^2 - 3y^2 = 0$ und $4y^3 - 6xy = 0$ ist. Die erste Gleichung ist äquivalent zu $y^2 = x^2$, also $y \in \{\pm x\}$. Im Fall $y = x$ ist die zweite Gleichung äquivalent zu $4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \frac{3}{2}\}$ und somit zu $(x,y) \in \{(0,0), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})\}$. Im Fall $y = -x$ ist die zweite Gleichung äquivalent zu $-4x^3 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(\frac{3}{2} - x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \frac{3}{2}\}$ und somit zu $(x,y) \in \{(0,0), (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})\}$. Insgesamt ist also $\{(0,0), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})\}$ die Menge der kritischen Punkte von f.

zu (b) Wie bereits in Teil a festgestellt, ist $f'(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = (0\ \ 0)$. Die zweifachen partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch $\partial_{11} f(x,y) = 6x$, $\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = -6y$ und $\partial_{22} f(x,y) = 12y^2 - 6x$. Die Hesse-Matrix von f im Punkt $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ist somit gegeben durch

$$\mathcal{H}(f, (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2})) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_{11} f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) & \partial_{12} f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \\ \partial_{21} f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) & \partial_{22} f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Es ist $9 > 0$ und $\det \mathcal{H}(f, (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) = 9 \cdot 18 - (-9)(-9) = 162 - 81 = 81 > 0$. Aus dem Hurwitz-Kriterium folgt somit, dass $\mathcal{H}(f, (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}))$ positiv definit ist. Laut Vorlesung ist dies zusammen mit $f'(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = (0\ \ 0)$ ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines lokalen Minimums an der Stelle $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (4+6 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) \quad = \quad (xy+z)(xy-z)^3 + (xy+z)^2(xy-z).$$

(a) Geben Sie Abbildungen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, so dass $f = h \circ g$ gilt, und weisen Sie nach, dass diese Gleichung tatsächlich erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie die totale Ableitung $f'(x,y,z)$ in jedem Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, indem Sie die mehrdimensionale Kettenregel auf die Funktionen g und h anwenden.

Lösung:

zu (a) Sei $g(x,y,z) = (xy+z, xy-z)$ und $h(x,y) = xy^3 + x^2y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(h \circ g)(x,y,z) \quad &= \quad h(g(x,y,z)) \quad = \quad h(xy+z, xy-z) \quad = \\ (xy+z)(xy-z)^3 + (xy+z)^2(xy-z) \quad &= \quad f(x,y,z).\end{aligned}$$

zu (b) Die Ableitungen der Funktionen g und h sind gegeben durch

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 1 \\ y & x & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad h'(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 + 2xy & 3xy^2 + x^2 \end{pmatrix}.$$

Mit der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir

$$f'(x,y,z) \quad = \quad (h \circ g)'(x,y,z) \quad = \quad h'(g(x,y,z)) \cdot g'(x,y,z) \quad =$$

$$\begin{pmatrix} (xy-z)^3 + 2(xy+z)(xy-z) & 3(xy+z)(xy-z)^2 + (xy+z)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x & 1 \\ y & x & -1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} (u(x,y,z) + v(x,y,z)) \cdot y & (u(x,y,z) + v(x,y,z)) \cdot x & u(x,y,z) - v(x,y,z) \end{pmatrix}$$

mit $u(x,y,z) = (xy-z)^3 + 2(xy+z)(xy-z)$ und $v(x,y,z) = 3(xy+z)(xy-z)^2 + (xy+z)^2$.

Name: ____________________

Aufgabe 8. (3+1+6 Punkte)

(a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wie ist die Obersumme von f bezüglich einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q definiert?

(b) Geben Sie die Definition des Oberintegrals von f an.

(c) Berechnen Sie mit dem Satz von Fubini das Riemann-Integral der Funktion

$$g : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x,y) \mapsto x^2y + 3x.$$

Bei Aufgabenteil (a) und (b) achten Sie bitte darauf, dass Sie die Bedeutung aller von Ihnen verwendeten Bezeichnungen mit angeben.

Lösung:

zu (a) Sei $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ die Menge der Teilquader von Q bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$, und für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ sei $c_K = \sup f(K)$. Dann ist $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_K v_2(K)$ die Obersumme von f bezüglich $\mathcal{Z}$, wobei $v_2(K)$ jeweils den Flächeninhalt von K bezeichnet.

zu (b) Nach Definition ist das Oberintegral von f das Infimum der Obersummen $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$, gebildet über alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ des Quaders Q.

zu (c) Der Satz von Fubini liefert

$$\int_{[0,1]^2} g(x,y)\, d(x,y) \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\, dy \right) dx \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2y + 3x\, dy \right) dx \quad =$$

$$\int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2 + 3xy \right]_0^1 dx \quad = \quad \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2 + 3x \right) dx \quad = \quad \left[\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{2} \quad = \quad \tfrac{10}{6} \quad = \quad \tfrac{5}{3}.$$