LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann
Dr. Leopold Zoller

Wintersemester 2023-24
24.02.2024

Analysis mehrerer Variablen

(Lehramt Gymnasium)

Wiederholungsklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang: ☒ Lehramt Gymnasium
☐ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (4+4+2 Punkte)

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 und $b : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(f, g) = f'(1)g'(1) + f'(2)g'(2)$ für alle $f, g \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass b eine symmetrische Bilinearform auf V ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ von b bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1 - x, 2 + 3x, x^2 + 1)$.

(c) Entscheiden Sie, ob b positiv definit ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie durch Überprüfung eines geeigneten Kriteriums nach, dass A ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform ist.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A, und für jeden Eigenwert die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

(c) Geben Sie eine Matrix in $\mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform an, die zu A ähnlich ist. Ein Nachweis ist nicht erforderlich.

Hinweis: Sie brauchen in Teil (c) keine Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ zu bestimmen mit der Eigenschaft, dass TAT^{-1} in Jordanscher Normalform vorliegt. Nach Erledigung von Teil (a) und (b) ist für (c) keine neue Rechnung mehr notwendig.

Name: ____________________

Aufgabe 3. (6+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Wir betrachten im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit der Standardmetrik d gegeben durch $d(a,b) = |a-b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Seien $U_1, U_2 \subseteq Y$ gegeben durch $U_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ und $U_2 = Y \setminus \{0\}$. Entscheiden Sie jeweils, ob U_1 bzw. U_2 in Y relativ offen bzw. relativ abgeschlossen ist. (Möglich ist auch jeweils beides, oder keines von beidem.) Eine Begründung ist hier *nicht* erforderlich.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (5+5 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{xy}{4x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Geben Sie eine Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ mit $\lim_n (x_n, y_n) = (0,0)$ und $\lim_n f(x_n, y_n) = 0$ an, und weisen Sie nach, dass die Folge diese Eigenschaften tatsächlich besitzt.

(b) Untersuchen Sie (eventuell mit Hilfe einer weiteren Folge in $\mathbb{R}^2$), ob die Funktion f im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (6+4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $f'(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (Hierbei darf ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass f in jedem solchen Punkt total differenzierbar ist.)

(b) Geben Sie die Richtungsableitungen $\partial_{(a,b)} f(1,2)$ im Punkt $(1,2)$ für alle Vektoren $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ an.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (6+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f.

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f an der Stelle $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ein lokales Minimum besitzt.

Name: ____

Aufgabe 7. (4+6 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) \quad = \quad (xy + z)(xy - z)^3 + (xy + z)^2(xy - z).$$

(a) Geben Sie Abbildungen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, so dass $f = h \circ g$ gilt, und weisen Sie nach, dass diese Gleichung tatsächlich erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie die totale Ableitung $f'(x, y, z)$ in jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, indem Sie die mehrdimensionale Kettenregel auf die Funktionen g und h anwenden.

Name: ____

Aufgabe 8. (3+1+6 Punkte)

(a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wie ist die Obersumme von f bezüglich einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q definiert?

(b) Geben Sie die Definition des Oberintegrals von f an.

(c) Berechnen Sie mit dem Satz von Fubini das Riemann-Integral der Funktion

$$g : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x,y) \mapsto x^2 y + 3x.$$

Bei Aufgabenteil (a) und (b) achten Sie bitte darauf, dass Sie die Bedeutung aller von Ihnen verwendeten Bezeichnungen mit angeben.