Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2023/24
15.02.2024

Algebra

(Wiederholungsklausur alte Studienordnung)

Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (5+3+2 Punkte)

Wir betrachten in der Gruppe $G = (\mathbb{Q}, +)$ die Untergruppen $U = \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5} \rangle$ und $V = \langle \frac{1}{30} \rangle$.

(a) Begründen Sie, dass die Elemente 1, $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ in U enthalten sind.

(b) Weisen Sie nach, dass U und V übereinstimmen.

(c) Sind $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$ Untergruppen von G? Bitte begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung:

zu (a) Aus $\frac{1}{2} \in U$ folgt $1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \in U$. Mit $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ ist auch $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$ in U enthalten. Aus $\frac{3}{5} \in U$ und $1 \in U$ folgt $\frac{1}{5} = 2 \cdot \frac{3}{5} - 1 \in U$.

zu (b) Zu zeigen ist $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}\} \subseteq V$ und $\frac{1}{30} \in U$. Die erste Aussage ist erfüllt, weil mit $\frac{1}{30}$ auch die Elemente $15 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{2}$, $20 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{3}$ und $18 \cdot \frac{1}{30} = \frac{3}{5}$ in V enthalten sind. Nach Teil (a) liegen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ in U, damit auch $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{1}{30}$.

zu (c) Wäre $\mathbb{N}$ ein Untergruppe von G, dann müsste das Neutralelement 0 von G in $\mathbb{N}$ liegen. Es gilt aber $0 \notin \mathbb{N}$. Also ist $\mathbb{N}$ keine Untergruppe von G. Andererseits ist durch $\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von G gegeben. Denn das Neutralelement 0 von G liegt in $\mathbb{Z}$, und für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt auch $a + b \in \mathbb{Z}$ und $-a \in \mathbb{Z}$.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mit der komponentenweisen Addition gegeben durch $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ für $a, c \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als Verknüpfung.

(a) Gegeben Sie jeweils ein Element der Ordnung 1, 2, 4 und 8 in G an, und begründen Sie jeweils, dass das Element tatsächlich diese Ordnung besitzt.

(b) Entscheiden Sie, ob G zyklisch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(c) Sei $N = \langle(\bar{4}, \bar{0})\rangle$. Bestimmen Sie die Ordnung der Faktorgruppe G/N (mit Nachweis).

Lösung:

zu (a) Das Neutralelement $0_G = (\bar{0}, \bar{0})$ von G ist ein Element der Ordnung 1. Wegen $2 \cdot (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) = 0_G$ und $(\bar{0}, \bar{1}) \neq 0_G$ ist $(\bar{0}, \bar{1}) \in G$ ein Element der Ordnung 2. Wegen $4 \cdot (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) = 0_G$ und $2 \cdot (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{4}, \bar{0}) \neq 0_G$ ist $(\bar{2}, \bar{0})$ in G ein Element der Ordnung 4. Wegen $8 \cdot (\bar{1}, 0\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) = 0_G$ und $4 \cdot (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{4}, \bar{0}) \neq 0_G$ ist $(\bar{1}, \bar{0})$ in G ein Element der Ordnung 8.

zu (b) Wäre G zyklisch, dann müsste es in G ein Element der Ordnung $|G| = |\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 8 \cdot 2 = 16$ geben. Tatsächlich aber gilt für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ jeweils $8 \cdot (a + 8\mathbb{Z}, b + 2\mathbb{Z}) = (8a + 8\mathbb{Z}, 8b + 2\mathbb{Z}) = (0 + 8\mathbb{Z}, 0 + 2\mathbb{Z}) = 0_G$. Die Ordnung jedes Elements ist also ein Teiler von 8, und somit kleiner als 16. Also ist G keine zyklische Gruppe.

zu (c) Wegen $2 \cdot (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) = 0_G$ und $(\bar{4}, \bar{0}) \neq 0_G$ gilt $|N| = \mathrm{ord}((\bar{4}, \bar{0})) = 2$. Damit erhalten wir $|G/N| = (G : N) = \frac{|G|}{|N|} = \frac{16}{2} = 8$.

Name: ____________________

Aufgabe 3. (6+4 Punkte)

Wir betrachten in der symmetrischen Gruppe S_6 die Untergruppe $G = \langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\rangle$. Die Untergruppe $N = \langle(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)\rangle$ von S_6 ist ein Normalteiler von G. (Das braucht nicht gezeigt werden.)

(a) Geben Sie alle Elemente der Faktorgruppe G/N als Teilmengen von G an, wobei Sie die Elemente jeder Nebenklasse in Zykelschreibweise darstellen. Geben Sie außerdem ein Repräsentantensystem von G/N an. Nachweise sind hier *nicht* erforderlich.

(b) Stellen Sie die Verknüpfungstabelle der Faktorgruppe G/N auf, wobei Sie alle Einträge durch das Repräsentantensystem aus Teil (a) darstellen.

Lösung:

zu (a) Wir setzen zur Abkürzung $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Es gilt $\sigma^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$ und $\sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$, also $N = \langle \sigma^3 \rangle$. Wegen $\sigma^3 \neq \mathrm{id}$ und $(\sigma^3)^2 = \mathrm{id}$ ist σ^3 ein Element der Ordnung 2, und es folgt $N = \{\mathrm{id}, \sigma^3\} = \{\mathrm{id}, (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)\}$. Wegen $\sigma^6 = (\sigma^3)^2 = \mathrm{id}$ und $\sigma^2, \sigma^3 \neq \mathrm{id}$ ist $|G| = \mathrm{ord}(\sigma) = 6$, also $G = \{\sigma^k \mid 0 \leq k < 6\}$. Damit erhalten wir neben N in G/N noch die Elemente

$$\sigma N = \{\sigma, \sigma^4\} = \{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)\} \quad \text{und} \quad \sigma^2 N = \{\sigma^2, \sigma^5\} = \{(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6), (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)\}.$$

Ein Repräsentantensystem von G/N ist zum Beispiel $R = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\}$.

zu (b) Die gesuchte Verknüpfungstabelle hat die Form

$*$	N	σN	$\sigma^2 N$
N	N	σN	$\sigma^2 N$
σN	σN	$\sigma^2 N$	N
$\sigma^2 N$	$\sigma^2 N$	N	σN

Name: ____________________

Aufgabe 4. (6+4 Punkte)

(a) Seien G und H Gruppen. Beweisen Sie mit dem Homomorphiesatz, dass ein Isomorphismus $(G \times H)/(G \times \{e_H\}) \cong H$ existiert.

(b) Sei nun G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G mit $N \cong S_4$ und $G/N \cong S_3$. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung 72 besitzt.

Lösung:

zu (a) Die Abbildung $\pi : G \times H \to H$, $(g,h) \mapsto h$ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für alle $(g,h), (g',h') \in G \times H$ gilt

$$\pi((g,h) \cdot (g',h')) \quad = \quad \pi(gg', hh') \quad = \quad hh' \quad = \quad \pi(g,h)\pi(g',h').$$

Der Homomorphismus ist surjektiv; ist nämlich $h \in H$ vorgegeben, dann gilt $\pi(e_G, h) = h$. Außerdem ist $\ker(\pi) = G \times \{e_H\}$, denn für alle $(g,h) \in G \times H$ gilt die Äquivalenz

$$(g,h) \in \ker(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \pi(g,h) = e_H \quad \Leftrightarrow \quad h = e_H \quad \Leftrightarrow \quad (g,h) \in G \times \{e_H\}.$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Homomorphiesatzes erfüllt, und wir erhalten den angegebenen Isomorphismus.

zu (b) Sei $\pi_N : G \to G/N$ der kanonische Epimorphismus. Auf Grund des Korrespondenzsatzes ist durch $\bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{U})$ eine bijektive Korrespondenz gegeben zwischen den Untergruppen von G/N und den Untergruppen von G, die N enthalten. Unter dieser Korrespondenz bleibt laut Vorlesung der Index der Untergruppen enthalten. Nun ist A_3 laut Vorlesung in S_3 eine Untergruppe vom Index 2, und wegen $G/N \cong S_3$ gibt es auch eine Untergruppe $\bar{U}$ von G/N vom Index 2. Somit ist $U = \pi_N^{-1}(\bar{U})$ eine Untergruppe vom Index 2 von G. Als Untergruppe vom Index 2 ist U auch ein Normalteiler von G. Aus $|G| = (G:N) \cdot |N| = |G/N| \cdot |N| = |S_3| \cdot |S_4| = 6 \cdot 24 = 144$ folgt $U = \frac{|G|}{(G:U)} = \frac{1}{2} \cdot 144 = 72$.

Anmerkung: In der ursprünglichen Fassung der Aufgabenstellung war leider ein Fehler, die Normalteiler-Eigenschaft betreffend. Ich habe den Punkt, der für diese Eigenschaft vorgegeben war, deshalb immer vergeben, auch wenn der Aufgabenteil gar nicht bearbeitet wurde.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (4+3+3 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 35.

(a) Begründen Sie mit Hilfe der Sylowsätze, dass G einen Normalteiler U der Ordnung 5 und einen Normalteiler V der Ordnung 7 besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass G isomorph zu $U \times V$ ist.

(c) Weisen Sie nach, dass G eine zyklische Gruppe ist.

Lösung:

zu (a) Für jede Primzahl p sei ν_p die Anzahl der Untergruppen von G. Auf Grund des 3. Sylowsatzes gilt $\nu_5 \mid 7$, also $\nu_5 \in \{1, 7\}$, und außerdem $\nu_5 \equiv 1 \bmod 5$. Wegen $7 \equiv 2 \not\equiv 1 \bmod 5$ folgt $\nu_5 = 1$. Ebenso gilt $\nu_7 \mid 5$, also $\nu_7 \in \{1, 5\}$, und außerem $\nu_7 \equiv 1 \bmod 7$. Wegen $5 \not\equiv 1 \bmod 7$ erhalten wir $\nu_7 = 1$.

Sei nun U die eine 5- und V eine 7-Sylowgruppe von G. Wegen $|G| = 5^1 \cdot 7^1$ gilt $|U| = 5$ und $|V| = 7$. Wegen $\nu_5 = \nu_7 = 1$ sind U und V auf Grund des 2. Sylowsatzes Normalteiler in G.

zu (b) Wir zeigen, dass G ein inneres direktes Produkt von U und V ist. Bereits in Teil (a) haben wir $U \trianglelefteq G$ und $V \trianglelefteq G$ festgestellt. Wegen $\mathrm{ggT}(|U|, |V|) = \mathrm{ggT}(5, 7) = 1$ gilt außerdem $U \cap V = \{e_G\}$. Wir überprüfen noch, dass G mit dem Komplexprodukt UV übereinstimmt. Wegen $U, V \trianglelefteq G$ ist UV jedenfalls eine Untergruppe von G (sogar ein Normalteiler). Wegen $U \leq UV$ und $V \leq UV$ sind $|U| = 5$ und $|V| = 7$ nach dem Satz von Lagrange Normalteiler von $|UV|$. Also ist $|UV|$ ein Vielfaches von $\mathrm{kgV}(5, 7) = 35$, insbesondere gilt $|UV| \geq 35 = |G|$. Wegen $UV \subseteq G$ folgt daraus $G = UV$. Insgesamt ist G also tatsächlich inneres direktes Produkt von U und V, und es folgt $G \cong U \times V$.

zu (c) Als Gruppen von Primzahlordnung sind U und V zyklisch. Daraus folgt $U \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $V \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Wir erhalten $G \cong U \times V \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Wegen $\mathrm{ggT}(5, 7) = 1$ kann der Chinesische Restsatz angewendet werden und liefert $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$. Ingesamt gilt also $G \cong \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass G eine zyklische Gruppe ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (4+3+3 Punkte)

Sei $L|\mathbb{F}_5$ eine Körpererweiterung und $\gamma \in L$ ein Element mit $\gamma^2 + \gamma + \bar{1} = \bar{0}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von γ über $\mathbb{F}_5$ (mit Nachweis), und geben Sie die Elemente der Körpers $K = \mathbb{F}_5(\gamma)$ an.

(b) Wir betrachten in K die Elemente $\alpha = \bar{3} + \bar{2}\gamma$ und $\beta = \bar{1} + \bar{4}\gamma$. Bestimmen Sie Elemente $a, b \in \mathbb{F}_5$, so dass die Gleichung $\alpha\beta = a + b\gamma$ erfüllt ist.

(c) Verifizieren Sie die Gleichung $\alpha^2 + \alpha + \bar{2} = \bar{0}$ und bestimmen Sie mit Hilfe dieser Gleichung Elemente $c, d \in \mathbb{F}_5$, so dass $\alpha^{-1} = c + d\gamma$ gilt.

Lösung:

zu (a) Das Element γ ist Nullstelle des normierten Polynoms Polynoms $f = x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{F}_5[x]$. Wegen $f(\bar{0}) = \bar{1}$, $f(\bar{1}) = \bar{3}$, $f(\bar{2}) = \bar{2}$, $f(\bar{3}) = \bar{3}$, $f(\bar{4}) = \bar{1}$ besitzt f in $\mathbb{F}_5$ keine Nullstelle, und ist als Polynom vom Grad 2 damit irreduzibel über $\mathbb{F}_5$. Insgesamt ist damit $\mu_{\gamma,\mathbb{F}_5} = f$ nachgewiesen. Laut Vorlesung gilt $[K : \mathbb{F}_5] = [\mathbb{F}_5(\gamma) : \mathbb{F}_5] = \mathrm{grad}(f) = 2$, und die Elemente von K sind gegeben durch $\{a + b\gamma \mid a, b \in \mathbb{F}_5\}$.

zu (b) Aus $f(\gamma) = \bar{0}$ folgt $\gamma^2 = -\bar{1} - \gamma$. Damit erhalten wir

$$\alpha\beta = (\bar{3} + \bar{2}\gamma)(\bar{1} + \bar{4}\gamma) = \bar{3} + (\bar{2} + \overline{12})\gamma + \bar{8}\gamma^2 = \bar{3} + \bar{4}\gamma + 3\gamma^2 = \bar{3} + \bar{4}\gamma + 3(-\bar{1} - \gamma) = \gamma.$$

Die Gleichung $\alpha\beta = a + b\gamma$ wird also durch $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$ erfüllt.

zu (c) Die angegebene Gleichung erhält man durch

$$\alpha^2 + \alpha + \bar{2} = (3 + \bar{2}\gamma)^2 + (\bar{3} + \bar{2}\gamma) + \bar{2} = \bar{9} + \overline{12}\gamma + \bar{4}\gamma^2 + \bar{5} + \bar{2}\gamma = \bar{4} + \bar{4}\gamma + \bar{4}(-\bar{1} - \gamma) = \bar{3}\gamma.$$

Diese Gleichung kann umgestelt werden zu $\bar{2}\alpha^{-1} = -\bar{1} - \alpha$, und durch Multiplikation mit $\bar{3}$ erhält man $\alpha^{-1} = -\bar{3} - \bar{3}\alpha = -\bar{3} - \bar{3}(\bar{3} + \bar{2}\gamma) = -\overline{12} - \bar{6}\gamma = \bar{3} + \bar{4}\gamma$. Die Gleichung $\alpha^{-1} = c + d\gamma$ wird also durch $c = \bar{3}$, $d = \bar{4}$ gelöst.

Name: ____

Aufgabe 7. (3+7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen der Teilkörper $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{-5})$ mit dem Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{-5})$ übereinstimmt.

(b) Bestimmen Sie die Erweiterungsgrade $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}]$ und $[L : \mathbb{Q}]$ (jeweils mit Nachweis).

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass die Polynome $f = x^5 - 2$ und $g = x^2 + 5$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel sind.

Lösung:

zu (a) Zu zeigen ist $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{-5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{-5})$ und $\{\sqrt[5]{2}, \sqrt{-5}\} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{-5})$. Die erste Aussage folgt aus $\sqrt[5]{2}, \sqrt{-5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{-5})$ und der Tatsache, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{-5})$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ unter Multiplikation abgeschlossen ist. Für die zweite Aussage bemerken wir, dass mit $\alpha = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{-5}$ aus das Element $\alpha^5 = 2 \cdot (-5)^2 \cdot \sqrt{-5} = 50\sqrt{-5}$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$ enthalten ist, und damit auch die Elemente $\sqrt{-5} = \frac{1}{50} \cdot 50\sqrt{-5}$ und $\sqrt[5]{2} = (\sqrt{-5})^{-1} \cdot \alpha$.

zu (b) Das Polynom $f = x^5 - 2$ ist normiert und laut Angabe irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$, und es besitzt $\sqrt[5]{2}$ als Nullstelle. Daraus folgt $f = \mu_{\sqrt[5]{2},\mathbb{Q}}$ und $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(f) = 5$. Das Polynom $g = x^2 + 5 \in \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})[x]$ ist normiert, und es besitzt $\sqrt{-5}$ als Nullstelle. Wäre es in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})[x]$ reduzibel, dann müssten wegen $\mathrm{grad}(g) = 2$ die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{-5}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ liegen. Aber dies ist unmöglich, denn wegen $\sqrt[5]{2} \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \subseteq \mathbb{R}$, andererseits aber $\pm\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Also ist g in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})[x]$ irreduzibel. Insgesamt erhalten wir $g = \mu_{\sqrt{-5},\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})}$ und

$$[L : \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})] \quad = \quad [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})(\sqrt{-5}) : \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})] \quad = \quad \mathrm{grad}(g) = 2.$$

Mit der Gradformel folgt $[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 5 = 10$.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

Sei $f = x^4 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$ und $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{7})$.

(a) Weisen Sie nach, dass L ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $K \to K$ und $L \to K$, und begründen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

Lösung:

zu (a) Das Polynom f besitzt die Zerlegung

$$f \quad = \quad (x^2 - \sqrt{7})(x^2 + \sqrt{7}) \quad = \quad (x - \sqrt[4]{7})(x + \sqrt[4]{7})(x - i\sqrt[4]{7})(x + i\sqrt[4]{7}).$$

Die vier Linearfaktoren sind in $L[x]$ enthalten, denn mit i und $\sqrt[4]{7}$ liegen auch die Koeffizienten $\pm\sqrt[4]{7}$ und $\pm i\sqrt[4]{7}$ in L. Also zerfällt f über L in Linearfaktoren. Außerdem wird L von der Menge $N = \{\pm\sqrt[4]{7}, \pm i\sqrt[4]{7}\}$ der Nullstellen über $\mathbb{Q}$ erzeugt. Denn wie bereits festgestellt wurde, gilt $N \subseteq L$ und damit $\mathbb{Q}(N) \subseteq L$. Andererseits ist mit $\sqrt[4]{7}$ und $i\sqrt[4]{7}$ auch $i = (i\sqrt[4]{7})(\sqrt[4]{7})^{-1}$ in $\mathbb{Q}(N)$ enthalten, also $\{\sqrt[4]{7}, i\} \subseteq \mathbb{Q}(N)$ und damit auch $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, i) \subseteq \mathbb{Q}(N)$, insgesamt also $L = \mathbb{Q}(N)$.

zu (b) Das Polynom $f = x^4 - 7$ ist normiert, irreduzibel nach dem Eisenstein-Kriterium, und es besitzt $\sqrt[4]{7}$ als Nullstelle. Also ist f das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{7}$ über $\mathbb{Q}$, und wegen $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$ ist die Anzahl der $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $K \to K$ damit gleich der Anzahl Nullstellen von f in K. Teil (a) zeigt, dass $\pm\sqrt[4]{7}$, $\pm i\sqrt[4]{7}$ die vier komplexen Nullstellen von f sind. Dabei liegen $\pm\sqrt[4]{7}$ offenbar in K, die Nullstellen $\pm i\sqrt[4]{7}$ aber nicht (da $\sqrt[4]{7} \in \mathbb{R}$ und $K \subseteq \mathbb{R}$, andererseits aber $\pm i\sqrt[4]{7} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). Also hat f genau zwei Nullstellen in K, und somit gibt es genau zwei $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $K \to K$.

Nehmen wir an, $\sigma : L \to K$ ist ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus. Weil $i \in L$ eine Nullstelle des Polynoms $x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ und σ ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus ist, muss auch $\sigma(i) \in K$ eine Nullstelle von $x^2 + 1$ sein. Daraus folgt, dass eines der Elemente $\pm i$ in K liegt. Aber dies ist wegen $K \subseteq \mathbb{R}$ und $\pm i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ unmöglich.