3 Der Satz von Cayley – Hamilton und die Jordansche Normalform

Sir William Rowan Hamilton: ∗ Dublin 4.8.1805, † Dunsink 2.9.1865. Er gilt als Wunderknabe mit außergewöhnlicher Sprachbegabung, der mit vierzehn Jahren mehr als ein Dutzend Sprachen (einschließlich etlicher orientalischer und asiatischer) beherrscht. Er besucht keine Schule bis er sich mit achtzehn Jahren am Trinity-College in Dublin einschreibt und dort überragende Leistungen sowohl in den klassischen Fächern als auch in der Mathematik erreicht.
1827, also mit 22 Jahren und bevor er irgendein Abschlußexamen gemacht hat, wird er Andrews-Professor für Astronomie an der Universität Dublin und königlicher Astronom von Irland. Sein privates Leben gestaltet sich unter ungeordneten häuslichen Verhältnissen wenig glücklich, weshalb er sich in späteren Jahren zunehmend in den Alkohol flüchtet.
Die Entdeckung der Quaternionen ist sein aufsehenerregendstes mathematisches Resultat. Die Quaternionen bilden zwar nicht, wie manche gegen Ende des vorigen Jahrhunderts glaubten, die alleinige Grundlage der Mathematik, sie geben aber wesentliche Einblicke in die Struktur des Zahlenraums.

Wiederholung. Eine *K-Algebra (mit Eins)* ist ein Paar $(A, \cdot)$, bestehend aus einem K-Vektorraum A, sowie einer assoziativen und bilinearen Verknüpfung $\cdot$ auf A, die ein neutrales Element e, genannt *Eins* oder *Einselement* besitzt. Das bedeutet die Gültigkeit folgender Regeln für die Multiplikation:

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\
(\lambda a + \mu b) \cdot c &= \lambda(a \cdot c) + \mu(b \cdot c) \\
a \cdot (\mu b + \nu c) &= \mu(a \cdot b) + \nu(a \cdot c) \\
e \cdot a = \; & a \; = a \cdot e \\
0 \cdot a = \; & 0 \; = a \cdot 0
\end{aligned}$$

Beispiele. 1. K^n mit komponentenweiser Multiplikation

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n)$$

(Eins ist das n-tupel $(1, \ldots, 1)$),

2. die Polynomringe in einer oder mehreren Unbestimmten über K,
3. die Endomorphismenringe der K-Vektorräume mit der Verkettung als Verküpfung (hierbei handelt es sich im allgemeinen um nicht-kommutative K-Algebren mit der Identität als neutralem Element).

Ist A eine K-Algebra mit $e = 0$, so ist $A = \{0\}$, denn für alle $a \in A$ gilt dann ja:

$$a = a \cdot e = a \cdot 0 = 0\,.$$

Bemerkung. In einer K-Algebra sind die üblichen Potenzen induktiv definiert:

$$a^0 = e\,, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a\,.$$

Definitionen. a) Es sei A eine K-Algebra (mit Eins). Eine Teilmenge $U \subset A$ heißt *Unteralgebra* von A, wenn gilt:

1. U ist Untervektorraum von A,

2. U ist *multiplikativ abgeschlossen,* das heißt, für alle a, $b \in U$ ist auch $a \cdot b \in U$,
3. $e \in U$

b) Es seien A und B K-Algebren (mit Eins). Eine Abbildung $\psi : A \to B$ heißt *Algebrenhomomorphismus,* wenn gilt:

1. ψ ist linear,
2. ψ ist *multiplikativ,* das heißt, für alle a, $\tilde{a} \in A$ ist $\psi(a \cdot \tilde{a}) = \psi(a) \cdot \psi(\tilde{a})$,
3. $\psi(e) = e$.

Bemerkungen. 1. Eine Abbildung, die die ersten beiden Bedingungen für einen Algebrenhomomorphismus erfüllt, genügt nicht automatisch der dritten; ein Gegenbeispiel liefert die Einbettung $K \to K^2$, $\alpha \mapsto (\alpha, 0)$. Andererseits ist die Einbettung als Diagonale, $K \to K^2$, $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha)$ ein Algebrenhomomorphismus.
2. Ist $\psi : A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus, so ist $\operatorname{Bild} \psi$ eine Unteralgebra von B (wegen

$$\psi(a) \cdot \psi(\tilde{a}) = \psi(a \cdot \tilde{a}) \in \operatorname{Bild} \psi \ \ )$$

und $\operatorname{Kern} \psi$ ist ein Untervektorraum, der der folgenden multiplikativen Bedingung genügt: Für alle $a \in \operatorname{Kern} \psi$ und $\tilde{a} \in A$ gilt $a \cdot \tilde{a} \in \operatorname{Kern} \psi$ und $\tilde{a} \cdot a \in \operatorname{Kern} \psi$:

$$\psi(a \cdot \tilde{a}) = \psi(a) \cdot \psi(\tilde{a}) = 0 \cdot \psi(\tilde{a}) = 0\,.$$

Allgemein nennt man eine Untergruppe eines Ringes, die der eben angegebenen Bedingung genügt, ein *Ideal* des Ringes.
3. Ist A eine kommutative K-Algebra und $\psi : A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus, so ist $\operatorname{Bild} \psi$ eine kommutative Unteralgebra von B, unabhängig davon, ob B insgesamt kommutativ ist oder nicht.

Beispiele. 1. Es sei $\psi_1 : K^2 \to K$ die Projektion auf den ersten Faktor, die gegeben ist durch $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha$. Dann ist $\operatorname{Bild} \psi_1 = K$ und $\operatorname{Kern} \psi = \{0\} \times K$.
2. Ist A eine K-Algebra mit für $e \neq 0$, so ist die Abbildung

$$\varphi : K \to A, \alpha \mapsto \alpha e,$$

eine Einbettung von K in A als *Unteralgebra.*
Beweis. $\operatorname{Bild} \varphi = \operatorname{Span}(e)$ ist ein eindimensionaler Untervektorraum von A und als solcher isomorph zu K, wobei die Abbildung φ eine Isomorphie vermittelt, also insbesondere injektiv ist. Wegen

$$\varphi(\alpha\beta) = (\alpha\beta)e = \alpha(\beta(e \cdot e)) = \alpha(e \cdot \beta e) = \alpha e \cdot \beta e = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta)$$

und $\varphi(1) = e$ ist φ sogar ein Algebrenhomomorphismus, also eine Einbettung als Unteralgebra.
Schreibweise: α statt $\varphi(\alpha)$ oder αe.

Bezeichnung. Es sei A eine K-Algebra. Für $P = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j \in K[t]$ und $a \in A$ setzen wir

$$P(a) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j a^j\,.$$

Damit ist eine Abbildung

$$K[t] \times A \to A, (P, a) \mapsto P(a),$$

definiert. Im Fall $A = K$ haben wir dabei für festes P die zu P gehörige Polynomfunktion.

Satz von Cayley – Hamilton *Es seien V ein Vektorraum mit* $\dim V = n < \infty$ *und* $F \in \operatorname{End} V$. *Dann gilt* $P_F(F) = 0$.

Beispiel. $V = K^2$, $F = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_F = (1-t)^2 \Rightarrow$

$$P_F(F) = (E_2 - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Lemma und Bezeichnung. *Es seien A eine K-Algebra und $a \in A$. Dann ist die Abbildung*

$$\psi_a : K[t] \to A, P \mapsto P(a),$$

ein Algebrenhomomorphismus *und* $K[a] = \operatorname{Bild} \psi_a$ *ist eine kommutative Unteralgebra von A.*

Beweis. 1. ψ_a ist additiv:

$$\psi_a(\sum_{j=0}^n \alpha_j t^j + \sum_{j=0}^n \beta_j t^j) = \psi_a(\sum_{j=0}^n (\alpha_j + \beta_j) t^j) =$$

$$= \sum_{j=0}^n (\alpha_j + \beta_j) a^j = \sum_{j=0}^n \alpha_j a^j + \sum_{j=0}^n \beta_j a^j =$$

$$= \psi_a(\sum_{j=0}^n \alpha_j t^j) + \psi_a(\sum_{j=0}^n \beta_j t^j)\,.$$

2. ψ_a ist homogen:

$$\psi_a(\lambda \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j) = \psi_a(\sum_{j=0}^n \lambda \alpha_j t^j) =$$

$$= \sum_{j=0}^n \lambda \alpha_j a^j = \lambda(\sum_{j=0}^n \alpha_j a^j) =$$

$$= \lambda \psi_a(\sum_{j=0}^n \alpha_j t^j)\,.$$

3. ψ_a ist multiplikativ:

$$\psi_a(\sum_{j=0}^n \alpha_j t^j \cdot \sum_{i=1}^m \beta_i t^i) = \psi_a(\sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{j=0}^k \alpha_j \beta_{k-j}) t^k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{j=0}^k \alpha_j \beta_{k-j}) a^k) = \sum_{j=0}^n \alpha_j a^j \cdot \sum_{i=0}^m \beta_i a^i =$$

$$= \psi_a(\sum_{j=0}^n \alpha_j t^j) \cdot \psi_a(\sum_{i=0}^m \beta_i t^i)\,.$$

4. $\psi(1) = 1a^0 = a^0 = e$. □

Verallgemeinerung des Determinantenbegriffes auf Matrizen über kommutativen Ringen mit Eins. Es seien R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in R^{n,n}$ definieren wir:

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)}\,.$$

Dann beweist man wie im Fall von Körpern für die Abbildung $\det : R^{n,n} \to R$:

0. $\det A^t = \det A$,
1. det ist linear in jeder Zeile und Spalte,
2. det ist alternierend benzüglich der Zeilen und Spalten,
3. $\det E_n = 1$,
4. $\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \det A \cdot E_n$, wenn $\tilde{A}$ die zu A komplementäre Matrix bezeichnet.

Beweis des Satzes von Cayley – Hamilton: Wir wählen eine Basis $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und bilden die darstellende Matrix $A = (\alpha_{ij})$ von F bezüglich $\mathfrak{B}$; damit gilt für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ definitionsgemäß:

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i \,.$$

Diese Gleichungen können wir auch umständlicher aufschreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} F(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \operatorname{Id}(v_i)\,,$$

woraus sich

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} \operatorname{Id} - \delta_{ij} F)(v_i) = 0$$

ergibt; wir setzen zur Abkürzung $\beta_{ij} = \alpha_{ij} \operatorname{Id} - \delta_{ij} F$, so dass sich für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}(v_i) = 0$$

ergibt.
Über dem Ring $K[F]$ haben wir die Matrix $B = (\beta_{ij}) = A - FE_n$ und die Behauptung lautet $\det B = 0$. Dazu genügt es, $\det B(v_k) = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ zu zeigen. Wir bilden die Komplementärmatrix $\tilde{B} = (\tilde{\beta}_{jk})$ zu B. Dann gilt $B \cdot \tilde{B} = \det B E_n$, das heißt,

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \tilde{\beta}_{jk} = \delta_{ik} \det B\,.$$

Anwendung dieser Gleichung auf die Basisvektoren liefert:

$$\begin{aligned}
(\det B)(v_k) &= \sum_{i=1}^{n} (\delta_{ik} \det B)(v_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \tilde{\beta}_{jk}\Big)(v_i) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \tilde{\beta}_{jk}(v_i) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \tilde{\beta}_{jk} \circ \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}(v_i) = 0
\end{aligned}$$

für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, woraus die Behauptung folgt. □

Definition. Ein Polynom heißt *normiert,* wenn der höchste Koeffizient gleich 1 ist.

Lemma und Definition. *Es seien V ein Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$ und $F \in \operatorname{End} V$. Es gibt genau ein normiertes Polynom $M_F \in K[t]$, derart dass gilt:*

$$\operatorname{Kern} \psi_F = M_F \cdot K[t] = \{ P \mid P \in K[t] \wedge \frac{P}{M_F} \in K[t] \},$$

wobei $\psi_F : K[t] \to \operatorname{End} V$ den durch die Zuordnung $t \mapsto F$ bestimmten Algebrenhomomorphismus bezeichnet. Das Polynom M_F heißt *Minimalpolynom* von F; nach dem Satz von Cayley – Hamilton handelt es sich dabei um einen Teiler des charakteristischen Polynoms P_F von F.

Beweis. *Existenz*: Wir setzen

$$\mathcal{M} = \{ P \mid P \in \operatorname{Kern} \psi_F \wedge P \text{ normiert} \}.$$

Aus dem Satz von Cayley – Hamilton folgt $(-1)^n P_F \in \mathcal{M}$, also ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Wir finden $M \in \mathcal{M}$ mit minimalem Grad:

$$0 \le \operatorname{Grad} M \le \operatorname{Grad} P \text{ für alle } P \in \mathcal{M}.$$

Aus der Idealeigenschaft von $\operatorname{Kern} \psi_F$ folgt $M \cdot Q \in \operatorname{Kern} \psi_F$ für alle $Q \in K[t]$, das heißt, $M \cdot K[t] \subset \operatorname{Kern} \psi_F$.

Es gilt aber auch $\operatorname{Kern} \psi_F \subset M \cdot K[t]$: Es sei $P \in \operatorname{Kern} \psi_F$. Die Polynomdivision liefert eine Darstellung

$$P = M \cdot Q + R$$

mit $\operatorname{Grad} R < \operatorname{Grad} M$. Wie bereits bemerkt, gilt $M \cdot Q \in \operatorname{Kern} \psi_F$ und, da $\operatorname{Kern} \psi_F$ ein Untervektorraum von $K[t]$ ist, ergibt sich weiter: $R = P - M \cdot Q \in \operatorname{Kern} \psi_F$. Wäre nun $R \neq 0$, das heißt $R = \sum_{i=0}^{r} \beta_i t^i$ mit $\beta_r \neq 0$, so wäre $\beta_r^{-1} R \in \mathcal{M}$ mit $\operatorname{Grad} R < \operatorname{Grad} M$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von M. Also ist $R = 0$, das heißt, $P = M \cdot Q \in M \cdot K[t]$.

9. Juni 2000

Eindeutigkeit: Sei $M = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i$ und sei $\bar{M} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\alpha}_i t^i$ ein weiteres normiertes Polynom mit $\bar{M} \cdot K[t] = \operatorname{Kern} \psi_F$; es sei $\operatorname{Grad} M = m$ und $\operatorname{Grad} \bar{M} = \bar{m}$. Dann gibt es Polynome $Q, \bar{Q} \in K[t] \setminus \{0\}$ mit

$$\bar{M} = M \cdot Q, \quad M = \bar{M} \cdot \bar{Q},$$

woraus

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \operatorname{Grad} \bar{M} = \operatorname{Grad} M + \operatorname{Grad} Q \ge \operatorname{Grad} M = m, \\ m &= \operatorname{Grad} M = \operatorname{Grad} \bar{M} + \operatorname{Grad} \bar{Q} \ge \operatorname{Grad} \bar{M} = \bar{m}, \end{aligned}$$

also $m = \bar{m}$ und $\operatorname{Grad} Q = \operatorname{Grad} \bar{Q} = 0$, das heißt, $Q, \bar{Q} \in K$, folgt. Da die Polynome M und $\bar{M}$ normiert sind, gilt $\alpha_m = 1 = \bar{\alpha}_m$ und Koeffizientenvergleich in der Gleichung $\bar{M} = M \cdot Q$ liefert

$$1 = 1 \cdot Q = Q,$$

woraus $\bar{M} = M$ folgt. $\square$

Bemerkung. Das Minimalpolynom M_F von F ist also das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades, für das $M_F(F) = 0$ gilt.

Lemma. *Es seien V ein Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$ und $F \in \operatorname{End} V$.*
Das Minimalpolynom von F hat die gleichen Nullstellen wie das charakteristische Polynom von F.

Beweis. Es sei $M_F = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^i$. Da M_F ein Teiler von P_F ist, ist jede Nullstelle von M_F auch Nullstelle von P_F. Sei nun umgekehrt $\lambda \in K$ eine Nullstelle von P_F, also ein Eigenwert von F. Wir wählen einen Eigenvektor v zu λ und berechnen:

$$0 = (\sum_{i=0}^m \alpha_i F^i)(v) = \sum_{i=0}^m \alpha_i F^i(v) =$$

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i(\lambda^i v) = (\sum_{i=0}^m \alpha_i \lambda^i)v\,,$$

woraus wegen $v \neq 0$ wie gewünscht $M_F(\lambda) = 0$ folgt. □

Bemerkung. Für alle $\lambda \in K$ gilt:

$$m(M_F;\lambda) \leq m(P_F;\lambda)\,.$$

Beweis. Ist λ kein Eigenwert von F, so sind beide Seiten der behaupteten Ungleichung gleich Null. Sei nun λ ein Eigenwert von F; wir setzen zur Abkürzung $m_l = m(M_F;\lambda)$ und $m_r = m(P_F;\lambda)$. Dann haben wir nach Definition der Vielfachheit Polynome Q_l, Q_r mit $M_F = (t-\lambda)^{m_l}Q_l$, $P_F = (t-\lambda)^{m_r}Q_r$ und $Q_l(\lambda) \neq 0 \neq Q_r(\lambda)$. Wir setzen noch $Q = P_F/M_F$ und berechnen

$$(t-\lambda)^{m_r}Q_r = P_F = M_F Q = (t-\lambda)^{m_l}Q_l Q\,.$$

Wäre nun $m_l > m_r$, so würde folgen

$$Q_r = (t-\lambda)^{m_l - m_r}Q_l Q$$

und damit

$$Q_r(\lambda) = 0$$

im Widerspruch zur Konstruktion von Q. □

Beispiel. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$P_F = (1-t)^3\,,\quad M_F = (1-t)^2\,.\ \square$$

Bemerkungen. 1. *V Vektorraum, $\mathfrak{B}$ Basis von V, $(\mathfrak{B}_j)_{j\in J}$ Zerlegung von $\mathfrak{B}$* $\Rightarrow$

$$V = \bigoplus_{j\in J} \operatorname{Span}\mathfrak{B}_j\,.$$

2. *V Vektorraum, $V = \bigoplus_{j\in J} W_j$, $\mathfrak{B}_j$ Basis von W_j. Die Mengen $\mathfrak{B}_j$ sind paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ist eine Basis von V.*

Lemma. *V Vektorraum, $F \in \operatorname{End} V$* $\Rightarrow$

$$0 = \operatorname{Kern} F^0 \subset \operatorname{Kern} F^1 \subset \operatorname{Kern} F^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Kern} F^s \subset \cdots V\,,$$

$$V = \operatorname{Bild} F^0 \supset \operatorname{Bild} F^1 \supset \operatorname{Bild} F^2 \supset \cdots \supset \operatorname{Bild} F^s \supset \cdots 0\,,$$

Ferner gilt für alle $s \in \mathbb{N}_0$:

1. $\operatorname{Kern} F^s = \operatorname{Kern} F^{s+1} \Rightarrow \operatorname{Kern} F^s = \operatorname{Kern} F^{s+k}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$,
2. $\operatorname{Bild} F^s = \operatorname{Bild} F^{s+1} \Rightarrow \operatorname{Bild} F^s = \operatorname{Bild} F^{s+k}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$,
3. $\dim V < \infty \Rightarrow \dim \operatorname{Kern} F^s + \dim \operatorname{Bild} F^s = \dim V$, *und damit - wie schon bewiesen -* $V \cong \operatorname{Kern} F^s \oplus \operatorname{Bild} F^s$, *aber im allgemeinen nicht* $V = \operatorname{Kern} F^s \oplus \operatorname{Bild} F^s$.

Beweis. Die Ketteneigenschaften sind trivial.
zu 1: Beweis durch Induktion nach k. Die Behauptung für $k = 1$ steckt in der Voraussetzung. Beim Schluß von k auf $k+1$ ist wegen der Ketteneigenschaft nur die Inklusion $\operatorname{Kern} F^{s+k+1} \subset \operatorname{Kern} F^s$ nachzuweisen: $v \in \operatorname{Kern} F^{s+k+1} \Rightarrow 0 = F^{s+k+1}(v) = F^{s+1}(F^k(v)) \Rightarrow$ (nach Voraussetzung) $F^k(v) \in \operatorname{Kern} F^{s+1} = \operatorname{Kern} F^s \Rightarrow F^{s+k}(v) = F^s(F^k(v)) = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Kern} F^{s+k} \Rightarrow$ (nach Induktionsvoraussetzung) $v \in \operatorname{Kern} F^s$.
zu 2: wieder Beweis durch Induktion nach k. Die Behauptung für $k = 1$ steckt auch wieder in der Voraussetzung. „$k \Rightarrow k+1$“: $\operatorname{Bild} F^{s+k+1} = F^{s+k+1}(V) = F^k(F^{s+1}(V)) = F^k(F^s(V)) = F^{s+k}(V) = F^s(V)$.
zu 3: Die Gleichheit der Dimensionen folgt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen. Hier ist ein Beispiel mit $V \neq \operatorname{Kern} F + \operatorname{Bild} F$: $V = K^2$, $F = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dann ist $\operatorname{Kern} F = \operatorname{Bild} F = \operatorname{Span}(e^1)$, also $\operatorname{Kern} F + \operatorname{Bild} F = \operatorname{Span}(e^1) \neq V$. □

Hilfssatz und Definition. *Es sei V ein Vektorraum. Ist W ein Untervektorraum von V, so gibt es Untervektorräume U von V mit $V = W \oplus U$.* Jedes solche U heißt *Komplement* von W in V.

Beweis. Man wähle eine Basis für W und ergänze zu einer Basis von V. Die ergänzenden Vektoren erzeugen ein Komplement.

Lemma. *Es seien V ein Vektorraum, $F \in \operatorname{End} V$ und W ein Komplement von $\operatorname{Kern} F$ in V. Dann ist die induzierte Abbildung $\tilde{F} : W \to \operatorname{Bild} F$ ein Isomorphismus.*

Im allgemeinen ist jedoch $W \neq \operatorname{Bild} F$.

Beweis. Variante a) $\dim V < \infty$. Aus den Dimensionsformeln für Untervektorräume und lineare Abbildungen folgt

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim \operatorname{Kern} F + \dim W \\ \dim V &= \dim \operatorname{Kern} F + \dim \operatorname{Bild} F, \end{aligned}$$

woraus sich $\dim W = \dim \operatorname{Bild} F$ ergibt. Wegen $\operatorname{Kern} F|W = 0$ ist $F|W$ injektiv, also $W \cong \operatorname{Bild} F|W = F(W)$ und damit $\dim F(W) = \dim W = \dim \operatorname{Bild} F = \dim F(V)$. Wegen $F(W) \subset F(V)$ ist damit $F(W) = F(V)$. Damit ist die induzierte Abbildung $\tilde{F}$ ein Isomorphismus.

Variante b) allgemein: $\operatorname{Kern} F \cap W = 0 \Rightarrow \operatorname{Kern} \tilde{F} = 0 \Rightarrow \tilde{F}$ Monomorphismus.

Sei $\tilde{v} \in \operatorname{Bild} F$, $\tilde{v} = F(v)$, $v = u + w$ mit $u \in \operatorname{Kern} F$, $w \in W \Rightarrow$

$$\tilde{v} = F(u+w) = F(u) + F(w) = 0 + \tilde{F}(w) = \tilde{F}(w) \in \operatorname{Bild} \tilde{F}$$

$\Rightarrow \tilde{F}$ Epimorphismus.

$\tilde{F}$ Monomorphismus und Epimorphismus $\Rightarrow \tilde{F}$ Isomorphismus.

Als Beispiel betrachten wir wieder $V = K^2$, $F = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Kern} F = \operatorname{Bild} F = \operatorname{Span}(e^1)$; ein Untervektorraum W mit $K^2 = \operatorname{Kern} F \oplus W$ ist von der Form $W = \operatorname{Span}(\alpha e^1 + e^2)$ mit einem beliebigen $\alpha \in K$, also sicherlich ungleich $\operatorname{Bild} F$. □

13. Juni 2000

Lemma. *Es seien V ein Vektorraum, $F \in \operatorname{End} V$, $i \in \mathbb{N}$ mit $i > 1$ und W ein Komplement von $\operatorname{Kern} F^{i-1}$ in $\operatorname{Kern} F^i$. Dann ist $W \cong F(W) \subset \operatorname{Kern} F^{i-1}$ mit $F(W) \cap \operatorname{Kern} F^{i-2} = 0$.*

Beweis. Wegen $W \cap \operatorname{Kern} F \subset W \cap \operatorname{Kern} F^{i-1} = 0$ ist $W \cong F(W)$. Wegen $W \subset \operatorname{Kern} F^i$ ist $F^{i-1}(F(W)) = F^i(W) = 0$, also $F(W) \subset \operatorname{Kern} F^{i-1}$. Nun sei $w \in F(W) \setminus \{0\}$ gegeben, $w = F(\tilde{w})$ mit $\tilde{w} \in W \setminus \{0\}$. Dann ist $\tilde{w} \notin \operatorname{Kern} F^{i-1}$, also $F^{i-2}(w) = F^{i-1}(\tilde{w}) \neq 0$, das heißt $w \notin \operatorname{Kern} F^{i-2}$. □

Lemma. *V Vektorraum, $\dim V = n < \infty$, $F \in \operatorname{End} V$, W F-invarianter Unterraum von V; F_W bezeichne den induzierten Endomorphismus von W. Dann gilt: P_{F_W} ist ein Teiler von P_F und M_{F_W} ist ein Teiler von M_F.*

Beweis. Wir setzen $m = \dim W$ und wählen eine Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ von W, die wir um $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von V ergänzen. Ist $A = (\alpha_{ij})$ die darstellende Matrix von F bezüglich $\mathfrak{B}$, also für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i \,,$$

so folgt aus der F-Invarianz von W

$$\alpha_{ij} = 0 \text{ für } j \in \{1, \dots, m\}, i \in \{m+1, \dots, n\} \,,$$

das heißt, A ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_W & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

mit $A_W = (\alpha_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,m\}}$, und A_W ist eine darstellende Matrix für F_W. Dann folgt aber

$$A - tE_n = \begin{pmatrix} A_W - tE_m & * \\ 0 & B - tE_{n-m} \end{pmatrix} ,$$

also

$$P_F = \det(A - tE_n) = \det(A_W - tE_m) \cdot \det(B - tE_{n-m}) = P_{F_W} \cdot P_B \,.$$

Aus $M_F(F)(V) = 0$ folgt $M_F(F_W)(W) = 0$, also ist M_{F_W} ein Teiler von M_F. □

Lemma. *V Vektorraum, $\dim V = n < \infty$, $F \in \operatorname{End} V$, $(W_s)_{s \in \{1,\dots,r\}}$ Familie von F-invarianten Unterräumen mit*

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r \,;$$

für jedes $s \in \{1, \dots, r\}$ bezeichne F_s den induzierten Endomorphismus von W_s und A_s eine darstellende Matrix von F_s. Dann ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

eine darstellende Matrix von F.

Beweis. Wir setzen $m_s = \dim W_s$ und $\bar{m}_s = \sum_{\bar{s}=1}^{s} m_{\bar{s}}$ für alle $s \in \{1, \dots, r\}$. Dann wählen wir der Reihe nach Basen $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, \dots, v_{m_1}\}$ von W_1, $\mathfrak{B}_s = \{v_{\bar{m}_{s-1}+1}, \dots, v_{\bar{m}_s}\}$ von W_s, derart dass jedes A_s die Abbildung F_s bezüglich $\mathfrak{B}_s$ darstellt. Dann ist $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und für $j \in \{1, \ldots, m_s\}$ und $A_s = (\alpha_{s;ij})$ gilt:

$$F(v_{\bar{m}_{s-1}+j}) = F_s(v_{\bar{m}_{s-1}+j}) = \sum_{i=1}^{m_s} \alpha_{s;ij} v_{\bar{m}_{s-1}+i} \,.$$

Damit ist die angegebene Matrix A darstellende Matrix von F bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$. □

Bezeichnung und Definition. Eine $m \times m$-Matrix der Form

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

heißt *Jordanmatrix* zu $\lambda (\in K)$. Für $J_m(\lambda) = (\alpha_{ij})$ gilt also:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{falls } j = i, \\ 1, & \text{falls } j = i + 1 \text{ und} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jede 1×1-Matrix (λ) ist eine Jordanmatrix, nämlich gerade $J_1(\lambda)$.

Camille Marie Ennemond Jordan, * Croix-Rousse (jetzt in Lyon eingemeindet) 5. 1. 1838, † Mailand 21. 1. 1922, Bergbauingenieur, dann Professor an der École Polytechnique. Neben der *Jordanschen Normalform* gehört vor allem der *Jordansche Kurvensatz* zum mathematischen Grundwissen. Die Jordanschen Normalform für Matrizen über $\mathbb{C}$ leitet Jordan 1871 im Zusammenhang mit der Lösung komplexer Differentialgleichungssysteme her: *Sur la résolution des équations différentielles linéaires,* (Comptes Rendus Ac. Sc. 73, 787 - 791). Den Jordanschen Kurvensatz formulierte er 1893. In der Gruppentheorie lebt sein Name fort in dem *Satz von Jordan-Hölder* über Kompositionsreihen.

Lemma. *V Vektorraum,* $\dim V = n < \infty$*, $F \in$* $\operatorname{End} V$*, $P_F = (\lambda - t)^n$. Dann ist V direkte Summe von Unterräumen*

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r \,,$$

derart dass für alle $s \in \{1, \ldots, r\}$ gilt:

1. *W_s ist F-invariant und*
2. *der induzierte Endomorphismus $F_s : W_s \to W_s$, $w \mapsto F(w)$ kann durch eine Jordanmatrix dargestellt werden.*

Beweis. Es sei $\operatorname{Grad} M_F = m$, das heißt $(\lambda - F)^m = 0 \in \operatorname{End} V$. Im Fall $m = 1$ haben wir $\lambda - F = 0$, das heißt, $F(v) = \lambda v$ für alle $v \in V$. Also ist jeder Vektor ungleich Null Eigenvektor, wir finden eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ aus Eigenvektoren. Setzen wir $W_s = \operatorname{Span}(v_s)$, so gilt $V = \bigoplus_{s=1}^n W_s$ und die induzierten Endomorphismen werden alle durch die Jordanmatrix $J_1(\lambda)$ dargestellt.
Zum besseren Verständnis des folgenden betrachten wir auch den Fall $m = 2$ noch für sich allein. Wir wählen ein Komplement W von $\operatorname{Kern}(\lambda - F)$ in V und eine Basis $\mathfrak{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_{r_2}\}$ von W ($r_2 = \dim W$). Aufgrund der vorbereitenden Lemmata ist $(\lambda - F)(\mathfrak{B}_2)$ eine Basis von $\operatorname{Bild}(\lambda - F)$ und wegen $m = 2$ ist $\operatorname{Bild}(\lambda - F) \subset \operatorname{Kern}(\lambda - F)$;

damit ist $(\lambda - F)(\mathfrak{B}_2)$ eine linear unabhängige Menge in $\mathrm{Kern}(\lambda - F) = \mathrm{Eig}(F;\lambda)$. Wegen $\dim \mathrm{Kern}(\lambda - F) = \dim V - \dim W = n - r_2$ finden wir eine Menge $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_{r_1}\}$ von $r_1 = n - 2r_2$ linear unabhängigen Vektoren in $\mathrm{Kern}(\lambda - F)$, die $(\lambda - F)(\mathfrak{B}_2)$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(\lambda - F)$ ergänzt. Damit ist

$$\mathfrak{B}_2 \cup (\lambda - F)(\mathfrak{B}_2) \cup \mathfrak{B}_1$$

eine Basis von V, wobei die Vereinigungsbildung disjunkt ist. Wir setzen nun $\tilde{w}_s = (F - \lambda)(w_s) \in \mathrm{Eig}(F;\lambda)$, $W_s = \mathrm{Span}\{\tilde{w}_s, -w_s\}$ für $j \in \{1, \ldots, r_2\}$ und $W_{r_2+j} = \mathrm{Span}\{v_j\}$ für $j \in \{1, \ldots, r_1\}$. Dann ist $V = \bigoplus_{s=1}^{r} W_s$ mit $r = r_2 + r_1$ und es gilt:

- für $s \in \{1, \ldots, r_2\}$: $F(\tilde{w}_s) = \lambda \tilde{w}_s \in W_s$, $F(w_s) = (F - \lambda)(w_s) + \lambda w_s = 1 \cdot \tilde{w}_s + \lambda \cdot w_s$. Damit ist W_s F-invariant und die induzierte Abbildung kann durch die Jordanmatrix $J_2(\lambda)$ dargestellt werden.
- für $s \in \{r_2 + 1, \ldots, r$: W_s besteht aus Eigenvektoren, ist also F-invariant und die induzierte Abbildung wird durch die Jordanmatrix $J_1(\lambda) = (\lambda)$ dargestellt.

16. Juni 2000

Nun zum allgemeinen Fall.
Sei zur Abkürzung $\tilde{F} = F - \lambda$; dann besagt die Voraussetzung

$$\tilde{F}^m = 0\,.$$

Wir wählen der Reihe nach Untervektorräume $U_1, \ldots, U_m$ von V derart dass gilt:

$$\begin{aligned}
V = \mathrm{Kern}\,\tilde{F}^m &= \mathrm{Kern}\,\tilde{F}^{m-1} \oplus U_1 \\
\mathrm{Kern}\,\tilde{F}^{m-1} &= \mathrm{Kern}\,\tilde{F}^{m-2} \oplus \tilde{F}(U_1) \oplus U_2 \\
\mathrm{Kern}\,\tilde{F}^{m-2} &= \mathrm{Kern}\,\tilde{F}^{m-3} \oplus \tilde{F}^2(U_1) \oplus \tilde{F}(U_2) \oplus U_3 \\
&\vdots \\
\mathrm{Kern}\,\tilde{F}^{m-j+1} &= \mathrm{Kern}\,\tilde{F}^{m-j} \oplus \tilde{F}^{j-1}(U_1) \oplus \ldots \oplus U_j = \\
&= \mathrm{Kern}\,\tilde{F}^{m-j} \oplus \bigoplus_{i=1}^{j} \tilde{F}^{j-i}(U_i) \\
&\vdots \\
\mathrm{Kern}\,\tilde{F}^2 &= \mathrm{Kern}\,\tilde{F} \quad \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-1} \tilde{F}^{m-i-1}(U_i) \\
\mathrm{Kern}\,\tilde{F} &= \bigoplus_{i=1}^{m} \tilde{F}^{m-i}(U_i)\,.
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
V &= \bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{i=1}^{j} \tilde{F}^{j-i}(U_i) = \\
&= \bigoplus_{1 \le i \le j \le m} \tilde{F}^{j-i}(U_i) = \\
&= \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=i}^{m} \tilde{F}^{j-i}(U_i)\,.
\end{aligned}$$

Wir setzen $\tilde{W}_i = \bigoplus_{j=i}^m \tilde{F}^{j-i}(U_i)$ für $i \in \{1, \dots, m\}$; dabei kann es durchaus vorkommen, dass einzelne $\tilde{W}_i$ trivial sind. In jedem Fall haben wir $V = \bigoplus_{i=1}^m \tilde{W}_i$ und wir zeigen, dass jedes $\tilde{W}_i$ ein F-invarianter Unterraum mit einer Direkten-Summen-Zerlegung der gewünschten Art ist.
Wir betrachten also ein festes $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $U_i \neq 0$. Es sei $r_i = \dim U_i$ und $\mathfrak{B}_i = \{v_{i1}, \dots, v_{ir_i}\}$ sei eine Basis von U_i. Dann ist $\mathfrak{B}_{ij} = \tilde{F}^{j-i}(\mathfrak{B}_i)$ für $j \in \{i, \dots, m\}$ eine Basis von $\tilde{F}^{j-i}(U_i)$ und $\bigcup_{j=i}^m \mathfrak{B}_{ij}$ ist eine Basis von $\tilde{W}_i$. Nun setzen wir noch für $s \in \{1, \dots, r_i\}$ und $j \in \{1, \dots, m+1-i\}$

$$\begin{aligned} w_{is;j} &= \tilde{F}^{m+1-i-j}(v_{is}) \\ W_{is} &= \operatorname{Span}(w_{is;j})_{j \in \{1, \dots, m+1-i\}} \,. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_i &= \bigoplus_{s=1}^{r_i} W_{is} \,, \\ F(w_{is;1}) &= F(\tilde{F}^{m-i}(v_{is})) = \lambda \cdot w_{is;1} \\ &\ \text{und für } j > 1: \\ F(w_{is;j}) &= F(\tilde{F}^{m+1-i-j}(v_{is})) = \\ &= (F - \lambda)(\tilde{F}^{m+1-i-j}(v_{is})) + \lambda \cdot w_{is;j} = \\ &= w_{is;j-1} + \lambda \cdot w_{is;j} \,. \end{aligned}$$

Damit jeder Unterraum W_{is} F-invariant und $J_{m+1-i}(\lambda)$ ist die darstellende Matrix des von F induzierten Endomorphismus von W_{is} bezüglich der Basis $\{w_{is;1}, \dots, w_{is;m+1-i}\}$. □

Bezeichnung und Definition. V Vektorraum, $\dim V = n < \infty$, $F \in \operatorname{End} V$, $\lambda \in K$. Die Menge

$$\overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda) = \operatorname{Kern}(F - \lambda)^n$$

heißt *verallgemeinerter Eigenraum* von F zu λ.

Lemma. *V Vektorraum, $\dim V = n < \infty$, $F \in \operatorname{End} V$; P_F zerfalle in Linearfaktoren. Dann gilt für alle $\lambda \in K$:*

1. *$\overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda)$ ist F-invariant und*
2. *$\dim \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda) = m(P_F; \lambda)$.*

Beweis. 1. Für $v \in \operatorname{Kern}(F - \lambda)^n$ gilt:

$$(F - \lambda)^n(F(v)) = F((F - \lambda)^n(v)) = 0 \,,$$

das heißt $F(v) \in \operatorname{Kern}(F - \lambda)^n$, woraus die F-Invarianz der verallgemeinerten Eigenräume folgt.
2. Ist λ kein Eigenwert, so verschwinden beide Seiten der Gleichung und es ist nichts weiter zu beweisen.
Nun sei λ ein Eigenwert von F. Wir setzen zur Abkürzung $W = \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda)$ und bezeichnen mit F_W den von F induzierten Endomorphismus von W. Wegen $(F - \lambda)^n(W) = 0$ ist $(F_W - \lambda)^n = 0$. Also ist das Minimalpolynom von F_W von der Form $M_{F_W} = (t - \lambda)^{\tilde{m}}$ mit $\tilde{m} \in \{1, \dots, n\}$. Da P_F in Linearfaktoren zerfällt und P_{F_W} ein Teiler von P_F ist, zerfällt auch P_{F_W} in Linearfaktoren. Da P_{F_W} die gleichen Nullstellen besitzt wie M_{F_W}, folgt $P_{F_W} = (\lambda - t)^m$ mit $m = \dim W \geq \tilde{m}$. Da P_{F_W} ein Teiler von P_F ist, folgt

$$\dim W \leq m(P_F; \lambda) \,.$$

Wir nehmen nun

$$\dim W < m(P_F;\lambda)$$

an und konstruieren einen Widerspruch.

<u>20. Juni 2000</u>

Dazu wählen wir eine Basis $\mathfrak{B}_W = \{v_1,\dots,v_m\}$ von W und ergänzen durch $\mathfrak{B}_U = \{v_{m+1},\dots,v_n\}$ zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von V. Dann ist

$$U = \operatorname{Span}(v_{m+1},\dots,v_n)$$

ein Komplement zu W in V; wir bezeichnen mit $\Phi : K^n \to V$ das zugehörige Koordinatensystem. Die darstellende Matrix A von F hat bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ die Form

$$A = \begin{pmatrix} A_W & * \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Dann folgt für die charakeristischen Polynome

$$(\lambda - t)^{m(P_F;\lambda)} \cdot Q = P_F = (\lambda - t)^m \cdot P_B\,.$$

Aufgrund der Annahme können wir durch $(\lambda - t)^m$ kürzen und erhalten

$$P_B = (\lambda - t)^k \cdot Q$$

mit $k = m(P_F;\lambda) - m > 0$. Also ist λ ein Eigenwert von $B \in K^{n-m}$.

Wir wählen einen zugehörigen Eigenvektor $u \in K^{n-m}$ und berechnen:

$$\begin{pmatrix} A_W & * \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde u \\ \lambda u \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun $\Phi\binom{0}{u} = w$ so haben wir nach Konstruktion zunächst $w \in U$. Andererseits ergibt sich

$$F(w) = F \circ \Phi\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \Phi \circ A\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} =$$

$$\Phi\begin{pmatrix} \tilde u \\ \lambda u \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \tilde u \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda u \end{pmatrix} = \tilde w + \lambda w$$

mit $\tilde w \in W$. Damit berechnen wir

$$(F-\lambda)^{n+1}(w) = F \circ (F-\lambda)^n(w) - (F-\lambda)^n(\lambda w) =$$

$$= (F-\lambda)^n \circ F(w) - (F-\lambda)^n(\lambda w) = (F-\lambda)^n(\tilde w) = 0\,,$$

also $w \in \operatorname{Kern}(F-\lambda)^{n+1} = \operatorname{Kern}(F-\lambda)^n = \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda) = W$. Wegen $w \neq 0$ ist das ein Widerspruch zu $W \cap U = 0$. $\square$

Bemerkung. Die Voraussetzung, dass P_F in Linearfaktoren zerfällt, ist eigentlich überflüssig. Um dies einzusehen braucht man den allgemeingültigen Satz: *P_F ist ein Teiler von M_F^n*, den wir nicht bewiesen haben.

Satz. *V Vektorraum, $\dim V = n < \infty$, $F \in \operatorname{End} V$. Ist $P_F = \prod_{j=0}^{k}(\lambda_j - t)^{m_j}$, so gilt:*

$$V = \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_k)\,.$$

Beweis. Wir setzen für $q \in \{0,1,\ldots,k-1\}$, $l \in \{0,1,\ldots,n\}$:

$$V_{q,l} = \sum_{j=1}^{q} \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_j) + \operatorname{Kern}(F - \lambda_{q+1})^l$$

und beweisen durch doppelte Induktion (nach q und l), dass es sich dabei jeweils um direkte Summen handelt.
$q = 0$: Wir haben für jedes l nur einen Summanden; damit ist nichts zu beweisen.
$q \Rightarrow q+1$, $l = 0$: $V_{q+1,0} = V_{q,n}$
$l \Rightarrow l+1$: Es sei

$$\sum_{j=1}^{q+2} w_j = 0$$

mit $w_j \in \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_j)$ für $j \in \{1,\ldots,q+1\}$ und $w_{q+2} \in \operatorname{Kern}(F - \lambda_{q+2})^{l+1}$.
Es ist $w_j = 0$ für alle $j \in \{1,\ldots,q+2\}$ zu zeigen. Wenden wir auf die gegebene Gleichung $F - \lambda_{q+2}$ an, so erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^{q+2} (F - \lambda_{q+2})(w_j) = 0\,.$$

Für $j \in \{1,\ldots,q+1\}$ gilt:

$$(F-\lambda_j)^n((F-\lambda_{q+2})(w_j)) = (F-\lambda_{q+2})((F-\lambda_j)^n(w_j)) = 0\,,$$

also $(F-\lambda_{q+2})(w_j) \in \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_j)$; ferner haben wir

$$(F-\lambda_{q+2})^l((F-\lambda_{q+2})(w_{q+2})) = (F-\lambda_{q+2})^{l+1}(w_{q+2}) = 0\,.$$

Damit folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$(F-\lambda_{q+2})(w_j) = 0$$

für alle $j \in \{1,\ldots,q+2\}$. Für $j \in \{1,\ldots,q+1\}$ berechnen wir weiter:

$$F(w_j) = \lambda_{q+2} \cdot w_j$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= (F-\lambda_j)^n(w_j) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-\lambda_j)^i F^{n-i}(w_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-\lambda_j)^i \lambda_{q+2}^{n-i} \cdot w_j = (\lambda_{q+2} - \lambda_j)^n w_j\,. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda_{q+2} \neq \lambda_j$ folgt daraus $w_j = 0$ für $j \in \{1,\ldots,q+1\}$, sowie angesichts der Ausgangsgleichung auch $w_{q+2} = 0$.
Damit ist $\sum_{j=1}^{k} \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_j)$ als direkte Summe nachgewiesen. Für die Dimension ergibt sich nun:

$$\dim \bigoplus_{j=1}^{k} \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_j) = \sum_{j=1}^{k} \dim \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_j) = \sum_{j=1}^{k} m_j = n = \dim V\,,$$

woraus $\bigoplus_{j=1}^{k} \dim \overline{\operatorname{Eig}}(F;\lambda_j) = V$ folgt. □

Satz. Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform. *V Vektorraum,* $\dim V = n < \infty$, *$F \in \operatorname{End} V$; P_F zerfalle in Linearfaktoren. Dann ist V direkte Summe von Unterräumen*

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$$

derart, dass für alle $s \in \{1, \ldots, r\}$ gilt:

1. *W_s ist F-invariant und*
2. *der induzierte Endomorphismus $F_s : W_s \to W_s$, $w \mapsto F(w)$, kann durch eine Jordanmatrix dargestellt werden.*

Die auftretenden Jordanmatrizen sind nach Typ und Anzahl (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

Beweisskizze. Es ist nur noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Eigenwerte und

$$m_j = m(P_F; \lambda_j)\,, \quad \tilde{m}_j = m(M_F; \lambda_j)$$

für $j \in \{1, \ldots, k\}$; dann ist $P_F = \prod_{j=1}^k (\lambda_j - t)^{m_j}$. Wegen $V = \bigoplus_{j=1}^k \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda_j)$ genügt es, die Behauptung für Endomorphismen mit nur einem einzigen Eigenwert λ zu beweisen. Besitzt F_s die Jordanmatrix $J_m(\lambda)$ als darstellende Matrix, so ist $W_s \subset \operatorname{Kern}(F - \lambda)^m$ und zwar gerade einer der Untervektorräume, die wir bei der entsprechenden Zerlegung eines Vektorraums in Bezug auf einen Endomorphismus mit genau einem Eigenwert konstruiert haben. $\square$

23. Juni 2000

Zusatz. *V Vektorraum,* $\dim V = n < \infty$, *$F \in \operatorname{End} V$; P_F zerfalle in Linearfaktoren. Dann gilt für alle Eigenwerte λ:*

$$\overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda) = \operatorname{Kern}(F - \lambda)^{\tilde{m}} \neq \operatorname{Kern}(F - \lambda)^{\tilde{m}-1}$$

mit $\tilde{m} = m(M_F; \lambda)$.

Beweis. Es sei

$$M_F = \prod_{s=1}^r (t - \lambda_s)^{\tilde{m}_s}\,.$$

Dann folgt für alle $s \in \{1, \ldots, n\}$ zunächst aus $\tilde{m}_s \leq n$:

$$\operatorname{Kern}(F - \lambda_s \operatorname{Id})^{\tilde{m}_s} \subset \operatorname{Kern}(F - \lambda_s \operatorname{Id})^n = \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda)\,.$$

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir ein festes $s_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt für alle $v \in \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda_{s_0}) \setminus \{0\}$, alle $s \in \{1, \ldots, s\}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ wegen der F-Invarianz von $\overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda_{s_0})$:

$$(F - \lambda_s \operatorname{Id})^k(v) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\lambda_s)^{k-j} F^j(v) \in \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda_{s_0})\,; \tag{1}$$

für $s \neq s_0$ gilt darüberhinaus

$$(F - \lambda_s \operatorname{Id})^k(v) \neq 0\,, \tag{2}$$

was aus $\operatorname{Kern}(F - \lambda_s)^k \cap \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda_{s_0}) \subset \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda_s) \cap \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda_{s_0}) = 0$ folgt.

Nun betrachten wir $v_0 \in \overline{\operatorname{Eig}}(F; \lambda_{s_0})$ und berechnen:

$$0 = M_F(v_0) = \prod_{s=1}^r (F - \lambda_s \operatorname{Id})^{\tilde{m}_s}(v) = \prod_{s_0 \neq s=1}^r (F - \lambda_s \operatorname{Id})^{\tilde{m}_s} (F - \lambda_{s_0} \operatorname{Id})^{\tilde{m}_{s_0}}(v_0)\,.$$

Wegen (1) ist $(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}}(v_0)\in\overline{\mathrm{Eig}}(F;\lambda_{s_0})$. Wäre $(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}}(v_0)\neq 0$, so würde durch $(r-1)$-fache Anwendung von (2) und (1) der Widerspruch $M_F(v_0)\neq 0$ folgen. Also ist $v_0\in\mathrm{Kern}(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}}$. Da dies für alle $v_0\in\overline{\mathrm{Eig}}(F;\lambda_{s_0})$ gilt, ergibt sich die Behauptung

$$\overline{\mathrm{Eig}}(F;\lambda_{s_0}\subset\mathrm{Kern}(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}}\,.$$

Nun ist noch $\mathrm{Kern}(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}}\setminus\mathrm{Kern}(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}-1}\neq\emptyset$ zu zeigen. Dazu betrachten wir das Polynom

$$\tilde M=\prod_{s_0\neq s=1}^{r}(t-\lambda_s)^{\tilde m_s}\cdot(t-\lambda_{s_0})^{\tilde m_{s_0}-1}\,.$$

Dieses Polynom ist kein Teiler von M_F. Aus der Definition von M_F folgt dann $\tilde M(V)\neq 0$. Wir finden deshalb ein $w\in V$ mit $\tilde M(F)(w)\neq 0$. Da V direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume von F ist, haben wir eine Zerlegung

$$w=\sum_{s=1}^{r}w_s$$

mit $w_s\in\overline{\mathrm{Eig}}(F;\lambda_s)$ für alle $s\in\{1,\dots,s\}$. Wir betrachten zunächst $s_1\in\{1,\dots,s\}\setminus\{s_0\}$. Aus dem bereits Bewiesenen folgt $w_{s_1}\in\mathrm{Kern}(F-\lambda_{s_1}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_1}}$, also

$$\tilde M(F)(w_{s_1})=\prod_{s_0,s_1\neq s=1}^{r}(F-\lambda_s\,\mathrm{Id})^{\tilde m_s}\cdot(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}-1}\cdot(F-\lambda_{s_1}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_1}}(w_{s_1})=0\,.$$

Damit ergibt sich

$$\tilde M(F)(w_{s_0})=\tilde M(F)(w)\neq 0\,,$$

woraus $(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}-1}(w_{s_0})\neq 0$, also

$$w_{s_0}\in\mathrm{Kern}(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}}\setminus\mathrm{Kern}(F-\lambda_{s_0}\,\mathrm{Id})^{\tilde m_{s_0}-1}$$

folgt. □

Beispiel $V=\mathbb{R}^5$,

$$F=A=\begin{pmatrix}5&-15&-34&4&8\\5&-14&-34&2&9\\4&-20&-43&5&11\\15&-57&-124&12&32\\17&-76&-169&17&44\end{pmatrix}$$

Berechnung mit Maple liefert:

$$\begin{aligned}P_F&=-t^5+4t^4-t^3-10t^2+4t+8=(1+t)^2\cdot(2-t)^3\,,\\M_F&=t^4-2t^3-3t^2+4t+4=(t+1)^2\cdot(t-2)^2\,.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zunächst:

$$V=\overline{\mathrm{Eig}}(F;-1)\oplus\overline{\mathrm{Eig}}(F;2)$$

mit $\dim\overline{\mathrm{Eig}}(F;-1)=2$, $\dim\overline{\mathrm{Eig}}(F;2)=3$, sowie
$\overline{\mathrm{Eig}}(F;-1)=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^5\wedge(A+E)^2x=0\}$, $\overline{\mathrm{Eig}}(F;2)=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^5\wedge(A-2E)^2x=0\}$.
Mit dieser Information lässt sich die Jordansche Normalform angeben. Man findet zuerst einen Vektor v_2 mit $(A+E)^2v_2=0$, aber $(A+E)v_2\neq 0$. Dann bilden $v_1=(A+E)v_2$ und v_2 eine Basis von $\overline{\mathrm{Eig}}(F;-1)$, derart dass der auf $\overline{\mathrm{Eig}}(F;-1)$ induzierte Endomorphismus

durch die Jordanmatrix $J_2(-1)$ dargestellt wird. Weiter sucht und findet man einen Vektor v_4 mit $(A-2E)^2v_4 = 0$, aber $(A-2E)v_4 \neq 0$. Dann bilden $v_3 = (A-2E)v_4$ und v_4 eine linear unabhängige Menge in $\overline{\text{Eig}}(F;2)$, die wir durch einen Vektor v_5 zu einer Basis von $\overline{\text{Eig}}(F;2)$ ergänzen. Wäre v_5 kein Eigenvektor zum Eigenwert 2, so würden v_3, v_4, v_5 und $(A-2E)v_5$ eine linear unabhängige Menge in $\overline{\text{Eig}}(F;2)$ bilden, was wegen $\dim \overline{\text{Eig}}(F;2) = 3$ nicht möglich ist. Also wird der induzierte Endomorphismus von $\overline{\text{Eig}}(F;2)$ bezüglich der Basis $\{v_3, v_4, v_5\}$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Damit ist

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Jordansche Normalform von A.

Nun soll noch eine Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{5,5}$ mit $S^{-1}AS = J$ explizit bestimmt werden, dass heißt, es sollen Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ explizit angegeben werden. Maple liefert die Lösungsmenge $\overline{\text{Eig}}(F;-1)$ des linearen Gleichungssystems $(A+E)^2x = 0$ in Parameterdarstellung;

$$\overline{\text{Eig}}(F;-1) = \{(-2t_1 + t_2, t_1, -2t_1 + t_2, t_2, -5t_1 + 3t_2) \,|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Zur Wahl von v_2 machen wir den Ansatz $t_2 = 0$ und berechnen

$$(A+E)\begin{pmatrix} -2t_1 \\ t_1 \\ -2t_1 \\ 0 \\ -5t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_1 \\ t_1 \\ 3t_1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun $t_1 = 1$ und erhalten:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge $\overline{\text{Eig}}(F;2)$ des linearen Gleichungssystems $(A-2E)^2x = 0$ ist in Parameterdarstellung gegeben durch:

$$\overline{\text{Eig}}(F;2) = \{(\frac{5}{2}t_1 + 5t_2 - \frac{3}{2}t_3, t_1, t_2, 2t_1 + 5t_2 - t_3, t_3) \,|\, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Zur Wahl von v_4 machen wir den Ansatz $t_1 = t_2 = 0$ und berechnen

$$(A-2E)\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t_3 \\ 0 \\ 0 \\ -t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t_3 \\ -\frac{1}{2}t_3 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}t_3 \\ -\frac{1}{2}t_3 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun $t_3 = -2$ und erhalten:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Nun benötigen wir noch einen von v_3 linear unabhängigen Eigenvektor zum Eigenwert 2. Der Eigenraum ist in Parameterdarstellung gegeben durch:

$$\mathrm{Eig}(F;2) = \{(t_2, -2t_1 + 3t_2, t_1 - t_2, t_1, t_2) \,|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} .$$

Einen zu v_3 linear unabhängigen Eigenvektor erhalten wir durch die Wahl von $t_1 = 1$, $t_2 = 0$:

$$v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 23 & 50 & -4 & -13 \\ -2 & 7 & 15 & -1 & -4 \\ 6 & -24 & -53 & 5 & 14 \\ -1 & 5 & 11 & -1 & -3 \\ 2 & -9 & -19 & 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

27. Juni 2000

Feststellung. *Zwei Matrizen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind genau dann ähnlich, wenn sie gleiche Jordansche Normalformen haben.* $\square$

Hilfssatz. *Ist $\gamma = \alpha + i\beta$ Nullstelle des Polynoms $P \in \mathbb{R}[t]$, so ist auch $\bar{\gamma} = \alpha - i\beta$ Nullstelle von P.*

Beweis. Die Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\alpha + i\beta \mapsto \alpha - i\beta$, ist ein Körperautomorphismus. Ist $\alpha + i\beta$ Nullstelle von $P = \sum_{j=1}^n \lambda_j t^j$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$, so haben wir $\sum_{j=1}^n \lambda_j(\alpha + i\beta)^j = 0$ und damit auch $0 = \bar{0} = \overline{\sum_{j=1}^n \lambda_j(\alpha + i\beta)^j} = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j(\alpha + i\beta)^j} = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j} \cdot \overline{(\alpha + i\beta)^j} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot (\overline{\alpha + i\beta})^j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot (\alpha - i\beta)^j$. $\square$

Folgerung. *Jedes nichtkonstante Polynom mit reellen Koeffizienten zerfällt in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren.*

Beweis. Ohne wesentliche Einschränkung betrachten wir ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{R}[t]$ ohne reelle Nullstellen; es genügt zu zeigen, dass man einen quadratischen Faktor abspalten kann. Ist dann $\alpha + i\beta$ eine komplexe Nullstelle von P, so ist $\beta \neq 0$ und wir definieren

$$P_1 = (t - \alpha - i\beta)(t - \alpha + i\beta) = (t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 + \beta^2) \in \mathbb{R}[t]\,.$$

Dann führen wir eine Polynomdivision aus:

$$P = P_1 \cdot Q + R$$

mit $\operatorname{Grad} R \leq 1$. Über $\mathbb{C}$ betrachtet, hat R die beiden verschiedenen Nullstellen $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$, was nur für $R = 0$ möglich ist. □

Komplexifizierung eines reellen Vektorraums. Sei V ein reeller Vektorraum. Wir versehen $V \times V$ mit der Struktur eines komplexen Vektorraums. Dazu schreiben wir $v + iw$ statt (v, w) für die Elemente von $V \times V$. Die Addition ist komponentenweise gegeben:

$$(v_1 + iw_1) + (v_2 + iw_2) = (v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2)\,;$$

die Multiplikation mit Skalaren ist gegeben durch:

$$(\alpha + i\beta)(v + iw) = (\alpha v - \beta w) + i(\alpha w + \beta v)\,.$$

Den so erhaltenen $\mathbb{C}$-Vektorraum bezeichnen wir mit V_C.

Betrachten wir V_C vermöge der Einschränkung von

$$\mathbb{C} \times V_C \to V_C$$

auf $\mathbb{R} \times V_C$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, so erhalten wir $V \oplus V$ und damit injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $V \hookrightarrow V_C$, gegeben durch $v \mapsto v + i0$ beziehungsweise $w \mapsto 0 + iw$.

Kurzschreibweisen: v statt $v + i0$, iw statt $0 + iw$.
Wir betrachten V als durch die erste dieser beiden Abbildungen in V_C eingebettet.

Zwischen komplexen Vektorräumen betrachtet man auch Abbildungen, die nicht völlig linear sind.

Definition. Es seien V und W komplexe Vektorräume. Eine Abbildung $F : V \to W$ heisst *semilinear,* wenn für alle Vektoren v_1, v_2, $v \in V$ und alle Skalare $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ und
2. $F(\lambda v) = \bar{\lambda} F(v)$.

Die *komplexe Konjugation* auf V_C, das heisst, die Abbildung

$$(^-) : V_C \to V_C, v + iw \mapsto v + i(-w) = v - iw,$$

ist ein $\mathbb{R}$-linearer Automorphismus und in Bezug auf die Multiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{C}$ semilinear:

$$\overline{(\alpha + i\beta)(v + iw)} = (\overline{\alpha + i\beta})(\overline{v + iw})\,.$$

Die Fixpunkte von $(^-)$ sind gerade die Elemente von V.

Lemma. *Jede Basis von V ist eine Basis von V_C.*

Beweis. Es sei $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V. Als Familie in V_C ist $(v_j)_{j \in J}$

- erzeugend, denn für $v+iw$ mit $v=\sum_{j\in J}\alpha_j v_j$ und $w=\sum_{j\in J}\beta_j v_j$ gilt

$$\begin{aligned}
v+iw &= \sum_{j\in J}\alpha_j v_j + i\sum_{j\in J}\beta_j v_j = \\
&= \sum_{j\in J}(\alpha_j v_j + i0) + \sum_{j\in J}(0+i\beta_j v_j) = \\
&= \sum_{j\in J}(\alpha_j v_j + i0) + (0+i\beta_j v_j) = \\
&= \sum_{j\in J}(\alpha_j v_j + i\beta_j v_j) = \\
&= \sum_{j\in J}(\alpha_j + i\beta_j)(v_j + i0) = \\
&= \sum_{j\in J}(\alpha_j + i\beta_j)v_j\ :
\end{aligned}$$

  dabei ist zu beachten, dass aus $\alpha_j=0$ für fast alle j und $\beta_j=0$ für fast alle j auch $\alpha_j+i\beta_j=0$ für fast alle j folgt;

- linear unabhängig, denn aus $\sum_{j\in J}\gamma_j v_j=0$ mit $\gamma_j=\alpha_j+i\beta_j$, α_j, $\beta_j\in\mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j\in J}(\alpha_j + i\beta_j)v_j = \\
&= \sum_{j\in J}(\alpha_j v_j + i\beta_j v_j) = \\
&= \sum_{j\in J}\alpha_j v_j + i\sum_{j\in J}\beta_j v_j\,,
\end{aligned}$$

  also

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j\in J}\alpha_j v_j\,, \\
0 &= \sum_{j\in J}\beta_j v_j\,,
\end{aligned}$$

  woraus sich $\alpha_j=0$ und $\beta_j=0$, das heißt, $\gamma_j=0$ für alle $j\in J$ ergibt. □

Wir definieren $\operatorname{End}V\to\operatorname{End}V_C$, $F\mapsto F_C$, durch die Festsetzung $F_C(v+iw)=F(v)+iF(w)$:

- Additivität: $F_C((v_1+iw_1)+(v_2+iw_2))=F_C((v_1+v_2)+i(w_1+w_2))=F(v_1+v_2)+iF(w_1+w_2)=F(v_1)+F(v_2)+i(F(w_1)+F(w_2))=(F(v_1)+iF(w_1))+(F(v_2)+iF(w_2))=F_C(v_1+iw_1)+F_C(v_2+iw_2)$;
- Homogenität: $F_C((\alpha+i\beta)(v+iw))=$

$$\begin{aligned}
&= F_C((\alpha v-\beta w)+i(\alpha w+\beta v)) = \\
&= F(\alpha v-\beta w)+iF(\alpha w+\beta v) = \\
&= (\alpha F(v)-\beta F(w))+i(\alpha F(w)+\beta F(v)) = \\
&= (\alpha+i\beta)(F(v)+iF(w)) = (\alpha+i\beta)(F_C(v+iw))\,.\square
\end{aligned}$$

Dabei gilt

$$F \text{ Automorphismus} \Leftrightarrow F_C \text{ Automorphismus.}$$

Ferner ist F_C mit der komplexen Konjugation verträglich:

$$\begin{aligned}\overline{F_C(v+iw)} &= \overline{F(v)+iF(w)} = \\ &= F(v)-iF(w) = F(v)+iF(-w) = \\ &= F_C(v+i(-w)) = F_C(v-iw) = \\ &= F_C(\overline{v+iw})\,.\end{aligned}$$

Für $F \in \operatorname{End} V$ und eine Basis $\mathfrak{B}$ von V stimmen die darstellenden Matrizen von F und F_C bezüglich $\mathfrak{B}$ überein, da für alle $v \in V$ gilt: $F(v) = F_C(v)$.

<u>30. Juni 2000</u>

Bezeichnung. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen

$$\tilde{W} = \{(w_1,\ldots,w_{2m}) \in V_C^{2m} \mid \forall_{j=1}^m w_{m+j} = \bar{w}_j\} \subset V_C^{2m}\,,$$

$$\Phi : V^{2m} \to \tilde{W}\,,\ \ \Phi(v_1,\ldots,v_{2m})_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{m+j}+iv_j)\,, & 1 \le j \le m\,,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_j - iv_{j-m})\,, & m < j \le 2m\,,\end{cases}$$

$$\Psi : \tilde{W} \to V^{2m}\,,\ \ \Psi(w_1,\ldots,w_{2m})_j = \begin{cases} \frac{1}{i\sqrt{2}}(w_j - w_{m+j})\,, & 1 \le j \le m\,,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(w_{j-m} + w_j)\,, & m < j \le 2m\,.\end{cases}$$

Satz. V $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$.
$\mathfrak{B} = (v_1,\ldots,v_{2m})$ Basis von $V \Rightarrow \overline{\mathfrak{B}} = \Phi(\mathfrak{B})$ Basis von V_C.
$\tilde{W} \ni \overline{\mathfrak{B}} = \{w_1,\ldots,w_{2m}\}$ Basis von $V_C \Rightarrow \mathfrak{B} = \Psi(\overline{\mathfrak{B}})$ Basis von V.

Beweis. Wir bemerken zunächst: $\Psi \circ \Phi = \operatorname{id} V^{2m}$ und $\Phi \circ \Psi = \operatorname{id} \tilde{W}$. Dann betrachten wir Basen.

1. Die lineare Abbildung $V_C \to V_C$, $v_j \mapsto w_j$ wird bezüglich $\mathfrak{B}$ durch die Matrix

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} iE_m & -iE_m \\ E_m & E_m \end{pmatrix}$$

dargestellt. Diese Matrix ist invertierbar, die inverse Matrix hat die Form

$$\tilde{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -iE_m & E_m \\ iE_m & E_m \end{pmatrix}.$$

Also ist die betrachtete lineare Abbildung ein Automorphismus und damit ist $\overline{\mathfrak{B}}$ eine Basis von V_C.
2. Nun ist aber auch $\tilde{B}$ darstellende Matrix der linearen Abbildung $V_C \to V_C$, $w_j \mapsto v_j$ bezüglich $\mathfrak{B}$. Da $\tilde{B}$ invertierbar ist, ist auch diese Abbildung ein Automorphismus, und damit ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von V. □

Ergänzung. Insgesamt haben wir damit eine Bijektion zwischen den Basen $\mathfrak{B}$ von V und den Basen des Typs $\overline{\mathfrak{B}}$ von V_C hergestellt.
Nun interpretieren wir die Matrizen B und $\tilde{B}$ als Transformationsmatrizen:

$$B = \Phi_{\mathfrak{B}}^{-1} \circ \Phi_{\tilde{\mathfrak{B}}}\,,\ \ \tilde{B} = \Phi_{\tilde{\mathfrak{B}}}^{-1} \circ \Phi_{\mathfrak{B}}\,.$$

Dann gilt für $F \in \operatorname{End} V$: Ist A die darstellende Matrix von F bezüglich $\mathfrak{B}$, also $A = \Phi_{\mathfrak{B}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathfrak{B}}$, so ist $\tilde{A} = \tilde{B}AB$ die darstellende Matrix von F_C; dann gilt natürlich auch $A = B\tilde{A}\tilde{B}$. Spezialfall:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_m(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda = \mu + i\nu$ impliziert

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} iE_m & -iE_m \\ E_m & E_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_m(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -iE_m & E_m \\ iE_m & E_m \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} iE_m & -iE_m \\ E_m & E_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -iJ_m(\lambda) & J_m(\lambda) \\ iJ_m(\bar{\lambda}) & J_m(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J_m(\lambda) + J_m(\bar{\lambda}) & iJ_m(\lambda) - iJ_m(\bar{\lambda}) \\ -iJ_m(\lambda) + iJ_m(\bar{\lambda}) & J_m(\lambda) + J_m(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m(\mu) & -\nu E_m \\ \nu E_m & J_m(\mu) \end{pmatrix}.$$

Bezeichnung.

$$J_{2m}(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} J_m(\mu) & -\nu E_m \\ \nu E_m & J_m(\mu) \end{pmatrix}.$$

Lemma. *V $\mathbb{R}$-Vektorraum,* $\dim V < \infty$*,* $F \in \operatorname{End} V$*,* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *Nullstelle von P_F. Es gilt*

$$\dim \overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \lambda) = \dim \overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \bar{\lambda});$$

ist $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von $\overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \lambda)$ derart, dass für die darstellende Matrix $A = (\alpha_{ij})$ der induzierten Abbildung $F_\lambda \in \operatorname{End} \overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \lambda)$ gilt:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \textit{falls } j = i, \\ 1 \textit{ oder } 0, & \textit{falls } j = i + 1, \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

so ist $\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_m}$ eine Basis von $\overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \bar{\lambda})$ derart, dass $\bar{A} = (\overline{\alpha_{ij}})$ die darstellende Matrix der induzierten Abbildung $F_{\bar{\lambda}} \in \operatorname{End} \overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \bar{\lambda})$ ist.

Beweis. Wegen $P_{F_C} = P_F$ gilt

$$\dim \overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \lambda) = m(P_F; \lambda) = m(P_F; \bar{\lambda}) = \dim \overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \bar{\lambda}).$$

Nun sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von $\overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \lambda)$ der angegebenen Art, das heißt es gelte

$$\begin{aligned} F_C(w_1) &= \lambda w_1 \\ F_C(w_j) &= \alpha_{j-1j} w_{j-1} + \lambda w_j \text{ für } j \in \{2, \ldots, m\} \end{aligned}$$

mit $\alpha_{j-1j} \in \{0, 1\}$. Dann gilt offensichtlich auch

$$\begin{aligned} F_C(\overline{w_1}) &= \bar{\lambda}\overline{w_1} \\ F_C(\overline{w_j}) &= \alpha_{j-1j} \overline{w_{j-1}} + \bar{\lambda}\overline{w_j} \text{ für } j \in \{2, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Also genügt es zu zeigen, dass die Vektoren $\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_m}$ eine linear unabhängige Familie in $\overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \bar{\lambda})$ bilden. Daß sie in $\overline{\mathrm{Eig}}(F_C; \lambda)$ liegen, folgt aus den eben angegebenen Formeln: $\overline{w_1}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda}$, das heißt, wir haben $(F_C - \bar{\lambda})(\overline{w_1}) = 0$, und wir berechnen für $j > 1$: $(F_C - \bar\lambda)(\overline{w_j}) = \alpha_{j-1j}\overline{w_{j-1}}$, woraus $(F_C - \bar\lambda)^k(\overline{w_j}) = 0$ für ein $k \le j$ folgt. Zur linearen Unabhängigkeit bemerken wir, dass aus

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \overline{w_j} = 0$$

folgt

$$0 \quad = \quad \overline{\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \overline{w_j}} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\gamma_j \overline{w_j}} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\gamma_j} w_j \,,$$

woraus $\overline{\gamma_j} = 0$ und damit auch $\gamma_j = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ folgt. □

Satz (Existenz und Eindeutigkeit der reellen Jordanschen Normalform).
V $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = n < \infty$, $F \in \operatorname{End} V$. Dann ist V direkte Summe von Unterräumen

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_{r_1} \oplus W_{r_1+1} \oplus \dots \oplus W_{r_2}$$

derart, dass für alle $s \in \{1, \dots, r_1\}$ gilt:

1. *W_s ist F-invariant und*
2. *der induzierte Endomorphismus $F_s : W_s \to W_s$, $w \mapsto F(w)$, kann durch eine Jordanmatrix $J_m(\lambda)$ dargestellt werden.*

und für alle $s \in \{1, \dots, r_2 - r_1\}$ gilt:

1. *W_{r_1+s} ist F-invariant und*
2. *der induzierte Endomorphismus $F_{r_1+s} : W_{r_1+s} \to W_{r_1+s}$, $w \mapsto F(w)$, kann durch eine Matrix $J_{2m}(\mu, \nu)$ dargestellt werden.*

Die auftretenden Jordanmatrizen sind nach Typ und Anzahl (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

Beispiel. Die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom $P_A = t^2(t^2 + 2)$ und damit den reellen Eigenwert 0, sowie die komplexen Eigenwerte $\pm i\sqrt{2}$. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 wird erzeugt von $(3, 9, 0, 0)$, hat also die Dimension 1. Damit hat A die Jordan - Normalformen:

$$\text{komplex:} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} & \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \text{reell:} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis, bezüglich deren die komplexe Jordan - Normalform entsteht, bilden die Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 4 + i\sqrt{2} & 4 - i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \ \text{Inverse:} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{7}{18} \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -i\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & i\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

Eine Basis, bezüglich deren die reelle Jordan - Normalform entsteht, bilden die Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 9 & 0 & 0 & -7\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ Inverse: } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{7}{18} \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$