Rudolf Fritsch **Sommersemester 2000**

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

2. Mai 2000

1 Determinanten

Takakazu Seki Kowa * Fujioka, Kozuke (Japan) März 1642, † Edo (heute: Tokio) 24. 10. 1708, führt in einer Schrift von 1683 determinantenähnliche Ausdrücke ein (in derselben Schrift behandelt er auch magische Quadrate)
Gottfried Wilhelm Leibniz, * Leipzig 21.6./1.7.1646, † Hannover 14.11.1716, erwähnt determinantenähnliche Ausdrücke in einem Brief an den Marquis de l'Hospital vom 28.4.1693
Gabriel Cramer, * Genf 31.7.1704, † Bagnols-sur-Cèze 4.1.1752 (dort zur Erholung von den Folgen eines Verkehrsunfalls): *Introduction à l'analyse de lignes courbes algebriques* 1750
Carl Friedrich Gauss: *Disquisitiones arithmeticae* 1801

Vorbereitung: Das Signum einer Permutation

Wiederholung. Eine *Permutation* ist eine Bijektion einer Menge auf sich, das heißt, eine bijektive Abbildung, deren Quelle und Ziel übereinstimmen. Ist A eine feste Menge, so bezeichnet man die Permutationen $\pi : A \to A$ als *Permutationen von A;* wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}(A)$ die Menge aller Permutationen auf A.

Eine spezielle Permutation von A ist die Identität von A

$$\mathrm{id}\, A : A \to A, a \mapsto a\,;$$

die zu einer Permutation von A inverse Abbildung ist wieder eine Permutation von A, ebenso ist die Verkettung von zwei Permutationen von A wieder eine Permutation von A. Damit bilden die Permutationen von A mit der Verkettung als Verknüpfung eine Gruppe $(\mathrm{Aut}(A), \circ)$.

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $A = \{j \mid j \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq j \leq n\}$, so sprechen wir von der *symmetrischen Gruppe von n Elementen*, Bezeichnung: $\mathfrak{S}_n$. Die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ hat $n!$ Elemente. Schreibweise für Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_n$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Beispiel für die Berechnung einer Verkettung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Manchmal ist es sinnvoll, Permutationen in der anderen Reihenfolge zu multiplizieren; in diesem Fall schreibt die DIN-Norm 5473 (Zeichen und Begriffe der Mengenlehre) das Symbol $\odot$ als Verknüpfungszeichen vor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition. Eine Permutation heißt *Transposition*, wenn sie zwei Elemente miteinander vertauscht und alle übrigen festläßt.

Regel. *Eine Transposition ist zu sich selbst invers,* das heißt, *ist τ eine Transposition auf A, so gilt:*

$$\tau^{-1} = \tau$$

und damit

$$\tau^2 = \tau \circ \tau = \operatorname{id} A\,.$$

Lemma. *Jede nichtidentische Permutation in $\mathfrak{S}_n$ besitzt eine Zerlegung in ein Produkt von höchstens $n-1$ Transpositionen.*

Beweis durch Induktion nach n. Der Induktionsanfang bei $n = 1$ ist trivial, da $\mathfrak{S}_1$ keine nichtidentische Permutation enthält. Zum Induktionsschluß betrachten wir $\pi \in \mathfrak{S}_{n+1}$ und definieren zunächst $\tau \in \mathfrak{S}_{n+1}$ durch

$$\tau(j) = \begin{cases} \pi^{-1}(n+1), & \text{für } j = n+1, \\ n+1, & \text{für } j = \pi^{-1}(n+1), \\ j, & \text{sonst.} \end{cases}$$

τ ist entweder die Identität oder eine Transposition und bringt das richtige Element an den $(n+1)$-sten Platz. Nur definieren wir $\rho = \pi \circ \tau$ und bemerken

$$\rho(n+1) = \pi \circ \tau(n+1) = n+1\,;$$

damit können wir ρ als Permutation von n Elementen auffassen. Wir definieren $\rho' \in \mathfrak{S}_n$ durch

$$\rho'(j) = \rho(j) \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist ρ' ein Produkt von höchstens $n-1$ Transpositionen,

$$\rho' = \tau'_m \circ \ldots \circ \tau'_1$$

mit $m \leq n-1$, wobei jedes $\tau'_i \in \mathfrak{S}_n$ und zwar eine Transposition ist. Die τ'_i lassen sich nun umgekehrt als Elemente von $\mathfrak{S}_{n+1}$ auffassen; wir setzen für $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\tau_i(j) = \begin{cases} \tau'_i(j), & \text{für } j \in \{1, \ldots, n\}, \\ n+1, & \text{für } j = n+1. \end{cases}$$

Dann ist offensichtlich

$$\rho = \tau_m \circ \ldots \circ \tau_1$$

also

$$\pi = \pi \circ \tau \circ \tau = \rho \circ \tau = \tau_m \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \tau\,. \quad \Box$$

Diese Produktzerlegung ist nicht eindeutig bestimmt, aber es wird sich zeigen, daß die Anzahl der Faktoren entweder immer gerade oder immer ungerade ist.

Bezeichnung. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$J_n = \{(i,k) \mid (i,k) \in \mathbb{N}^2 \wedge 1 \leq i < k \leq n\}\,.$$

Definitionen. Es sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

1. Ein Paar $(i,k) \in J_n$ heißt *Fehlstand* oder *Verstellung* von π, wenn $\pi(i) > \pi(k)$ ist.
2. Das *Signum* von π ist die Zahl

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \pi \quad &= \quad \prod_{(i,k)\in J_n} \operatorname{sign}(\pi(k) - \pi(i)) \quad = \quad (-1)^f \quad = \\ &= \quad \begin{cases} +1, & \text{falls die Anzahl der Fehlstände von } \pi \text{ gerade ist,} \\ -1, & \text{falls die Anzahl der Fehlstände von } \pi \text{ ungerade ist,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei f die Anzahl der Fehlstände von π bezeichnet.

3. π ist eine *gerade* Permutation, falls $\operatorname{sign} \pi = 1$ ist, sonst eine *ungerade* Permutation.

Beispiel. Die Transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$ vertausche j_0 und j_1, $j_0 < j_1$. Die Fehlstände sind die Paare $(j_0, k) \in J_n$ mit $j_0 < k \leq j_1$ und die Paare $(i, j_1) \in J_n$ mit $j_0 \leq i < j_1$; dabei tritt das Paar (j_0, j_1) zweimal auf. Damit ist die Anzahl der Fehlstände $2 \cdot (j_1 - j_0) - 1$, also ungerade, das heißt, sign $\tau = -1$.

Lemma. *Für alle $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gilt:*

$$\operatorname{sign} \pi = \prod_{i<k} \frac{\pi(k) - \pi(i)}{k - i} \,.$$

Beweis. Das Produkt auf der rechten Seite der Gleichung läuft über die Menge J_n als Indexmenge. Wir setzen $z_{(i,k)} = \pi(k) - \pi(i)$, $n_{(i,k)} = k - i$ und $b_{(i,k)} = z_{(i,k)}/n_{(i,k)}$ für alle $(i, k) \in J$. Dann ist

$$\operatorname{sign} \pi = \prod_{i<k} b_{(i,k)}$$

zu zeigen. Für einen Index (i, k) hat der Bruch $b_{(i,k)}$ genau dann einen negativen Wert, wenn (i, k) ein Fehlstand von π ist. Also ist das Produkt genau dann negativ, wenn die Anzahl der Fehlstände von π ungerade ist. Damit hat das Produkt jedenfalls das behauptete Vorzeichen. Es bleibt zu zeigen, daß der Absolutbetrag gleich 1 ist. Dazu bemerken wir zunächst, daß die Abbildung $f : J_n \to J_n$,

$$(i, k) \mapsto \begin{cases} (\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(k)), & \text{falls } \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(k)\,, \\ (\pi^{-1}(k), \pi^{-1}(i)), & \text{falls } \pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(k) \end{cases}$$

bijektiv ist, denn die Zuordnung

$$(i, k) \mapsto \begin{cases} (\pi(i), \pi(k)), & \text{falls } \pi(i) < \pi(k)\,, \\ (\pi(k), \pi(i)), & \text{falls } \pi(i) > \pi(k) \end{cases}$$

liefert eine Umkehrabbildung. Damit können wir in dem zur Diskussion stehenden Produkt die Zähler umsortieren und erhalten

$$\prod_{i<k} b_{(i,k)} = \prod_{i<k} \frac{z_{f(i,k)}}{n_{(i,k)}} \,.$$

Für jeden auf der rechten Seite auftretenden Bruch gilt nun

$$|\frac{z_{f(i,k)}}{n_{(i,k)}}| = \frac{|z_{f(i,k)}|}{k - i} = \frac{\pi(\pi^{-1}(k)) - \pi(\pi^{-1}(i))}{k - i} = 1. \ \square$$

Satz. *Das Signum ist ein Homomorphismus $\mathfrak{S}_n \to (\{1, -1\}, \cdot)$.*

Beweis. Wir berechnen für π, $\rho \in \mathfrak{S}_n$ zunächst:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \pi \circ \rho &= \prod_{i<k} \frac{\pi \circ \rho(k) - \pi \circ \rho(i)}{k - i} = \\ &= \prod_{i<k} \frac{\pi \circ \rho(k) - \pi \circ \rho(i)}{\rho(k) - \rho(i)} \cdot \frac{\rho(k) - \rho(i)}{k - i} = \\ &= \prod_{i<k} \frac{\pi \circ \rho(k) - \pi \circ \rho(i)}{\rho(k) - \rho(i)} \cdot \operatorname{sign} \rho \,. \end{aligned}$$

Es bleibt also

$$\prod_{i<k} \frac{\pi \circ \rho(k) - \pi \circ \rho(i)}{\rho(k) - \rho(i)} = \operatorname{sign} \pi$$

zu zeigen. Dazu berechnen wir weiter

$$\prod_{i<k} \frac{\pi\circ\rho(k)-\pi\circ\rho(i)}{\rho(k)-\rho(i)} =$$

$$= \prod_{\substack{i<k\\ \rho(i)<\rho(k)}} \frac{\pi\circ\rho(k)-\pi\circ\rho(i)}{\rho(k)-\rho(i)} \cdot \prod_{\substack{i<k\\ \rho(i)>\rho(k)}} \frac{\pi\circ\rho(k)-\pi\circ\rho(i)}{\rho(k)-\rho(i)} =$$

$$= \prod_{\substack{i<k\\ \rho(i)<\rho(k)}} \frac{\pi\circ\rho(k)-\pi\circ\rho(i)}{\rho(k)-\rho(i)} \cdot \prod_{\substack{i>k\\ \rho(i)<\rho(k)}} \frac{\pi\circ\rho(k)-\pi\circ\rho(i)}{\rho(k)-\rho(i)} =$$

$$= \prod_{\rho(i)<\rho(k)} \frac{\pi\circ\rho(k)-\pi\circ\rho(i)}{\rho(k)-\rho(i)}\,.$$

<u>5. Mai 2000</u>

Folgerungen. 1. $\operatorname{sign}(\pi^{-1}) = \operatorname{sign}\pi$

2. *Ist π Produkt von k Transpositionen, so ist* $\operatorname{sign}\pi = (-1)^k$.

Beweis. 1. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(\pi^{-1}) &= \operatorname{sign}(\pi^{-1})\cdot\operatorname{sign}(\pi^{-1}\circ\pi) = \\ &= (\operatorname{sign}(\pi^{-1}))^2\cdot\operatorname{sign}\pi = \operatorname{sign}\pi\,.\end{aligned}$$

2. trivial. □

Definition. Kern(sign)$=\mathfrak{A}_n$ heißt *alternierende Gruppe* von n Elementen, besteht aus den $n!/2$ geraden Permutationen.

Lemma. *Für jede Transposition $\tau\in\mathfrak{S}_n$ gilt:*

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \,\dot\cup\, \mathfrak{A}_n\tau = \mathfrak{A}_n \,\dot\cup\, \tau\mathfrak{A}_n\,.$$

Beweis. Aus dem vorigen Satz folgt, daß die Mengen $\mathfrak{A}_n\tau = \{\pi\tau \mid \pi\tau\in\mathfrak{S}_n \wedge \pi\in\mathfrak{A}_n\}$ und $\tau\mathfrak{A}_n = \{\tau\pi \mid \tau\pi\in\mathfrak{S}_n \wedge \pi\in\mathfrak{A}_n\}$ nur ungerade Permutationen enthalten, während $\mathfrak{A}_n$ nur aus geraden Permutationen besteht. Also sind die angegebenen Vereinigungen disjunkt.

Es bleibt zu zeigen, daß jedes $\pi\in\mathfrak{S}_n\setminus\mathfrak{A}_n$ in $\mathfrak{A}_n\tau$ und $\tau\mathfrak{A}_n$ liegt. Für ein solches π gilt nun aber wieder nach dem vorigen Satz $\pi\tau$, $\tau\pi\in\mathfrak{A}_n$, also

$$\pi = \pi\circ(\tau\circ\tau) = (\pi\circ\tau)\circ\tau \in \mathfrak{A}_n\tau$$

und

$$\pi = (\tau\circ\tau)\circ\pi = \tau\circ(\tau\circ\pi) \in \tau\mathfrak{A}_n\,. \;\square$$

Existenz und Eindeutigkeit der Determinante

Karl Weierstrass, * Ostenfelde (Westfalen) 31.10.1815, † Berlin 19.2.1897

Motivation. Volumen für Parallelogramme, -epipede, -otope.
Begründung für das Vorzeichen

Definition. Eine Abbildung $\det : K^{n,n} \to K$ heißt *Determinante*, falls gilt:
1. det ist *linear in jeder Zeile* ;
2. det ist *alternierend,* das heißt die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen verschwindet;
3. det ist *normiert,* das heißt, es gilt $\det E_n = 1$.

Eigenschaften. *Ist* det *eine Determinante, so gilt für*

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

und $B \in K^{n,n}$:

4. $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$ *für alle* $\lambda \in K$.
Beweis.

$$\lambda A = (\lambda \alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix},$$

also

$$\det(\lambda A) = \det \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}) = \lambda^2 \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}) =$$

$$= \cdots = \lambda^i \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}) = \cdots = \lambda^n \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}). \quad \square$$

5. $a_i = \mathbf{0}$ *für ein* $i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \det A = 0$;

Beweis.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0\,. \quad \square$$

6. Entsteht $B \in K^{n,n}$ aus $A \in K^{n,n}$ durch eine Zeilenvertauschung, so gilt:

$$\det B = -\det A\,.$$

Beweis. Es sei

$$(i_0, k_0) \in J_n = \{(i,k) \,|\, (i,k) \in \mathbb{N}^2 \wedge 1 \leq i < k \leq n\}.$$

B entstehe aus A durch Vertauschung der i_0-ten und der k_0-ten Zeile. Dann gilt:

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i_0} + a_{k_0} \\ \vdots \\ a_{i_0} + a_{k_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i_0} \\ \vdots \\ a_{i_0} + a_{k_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_{i_0} + a_{k_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i_0} \\ \vdots \\ a_{i_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i_0} \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_{i_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 + \det A + \det B + 0\,. \quad \square$$

7. Entsteht $B \in K^{n,n}$ aus $A \in K^{n,n}$ durch die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, so gilt:

$$\det B = \det A\,.$$

Beweis. Es seien $(i_0, k_0) \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i_0 \neq k_0$ und $\lambda \in K$. B entstehe aus A durch Addition des λ-fachen der k_0-ten Zeile zur i_0-ten Zeile. Dann gilt:

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i_0} + \lambda a_{k_0} \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i_0} \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_{k_0} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + 0\,. \quad \square$$

8. *beim Ausräumen einer Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen (Transformieren auf Zeilenstufenform) ändert sich das Verschwinden oder Nichtverschwinden einer Determinante nicht.*

Beweis. Folgende Zeilenumformungen kommen vor:

(a) Vertauschung von zwei Zeilen; dies ändert das Vorzeichen, aber nicht das Verschwinden.

(b) Multiplikation einer Zeile mit einem von Null verschiedenen Skalar; die Determinante ändert wegen der Homogenität in dieser Zeile um denselben Skalar und wegen der Nullteilerfreiheit von K ändert dieser Prozeß das Verschwinden nicht.

(c) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile; dies ändert die Determinante nicht. □

9. $\det(e_{\pi(i)}) = \operatorname{sign} \pi$ *für alle* $\pi \in \mathfrak{S}_n$.
Beweis. Jede Permutation ist eine Hintereinanderausführung von Transpositionen. Jede einzelne Transposition bewirkt eine Zeilenvertauschung und damit einen Vorzeichenwechsel. Die Anzahl der verwendeten Transpositionen ist gerade oder ungerade, je nachdem, ob die $\operatorname{sign} \pi$ positiv oder negativ ist. □

10. *A (obere oder untere) Dreiecksmatrix* $\Rightarrow \det A = \prod_{i=1}^n \alpha_{ii}$. **Beweis.** Fall 1: Es gebe i_0 mit $\alpha_{i_0 i_0} = 0$. Dann läßt sich A durch elementare Zeilenumformungen, die den Betrag der Determinante nicht ändern, in eine Matrix $\hat{A} = (\hat{a}_i)$ mit $\hat{a}_n = 0$ überführen. Damit gilt:
$$|\det A| = |\det \hat{A}| = 0\,,$$
also
$$\det A = 0 = \alpha_{i_0 i_0} \cdot \ldots = \prod_{i=1}^n \alpha_{ii}\,.$$
Fall 2: $\alpha_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei $\hat{A} = \hat{\alpha}_{ij}$ gegeben durch $\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}/\alpha_{ii}$. Dann gilt:
$$\det A = \prod_{i=1}^n \alpha_{ii} \cdot \det \hat{A}\,.$$
Die Matrix $\hat{A}$ läßt sich durch elementare Zeilenumformungen, die den Wert einer Determinante nicht ändern, in die Einheitsmatrix E_n überführen, woraus sich $\det \hat{A} = 1$ ergibt.

<u>9. Mai 2000</u>

11. $\det A = 0 \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)$ *linear abhängig.*
Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\det A = 0$. Durch elementare Zeilenumformungen, die den Rang der Matrix und das Verschwinden oder Nichtverschwinden einer Determinante nicht ändern, werde in eine Matrix $\hat{A}$ von Zeilenstufenform überführt. Dabei handelt es sich zunächst um eine untere Dreiecksmatrix. Aus $\det \hat{A} = 0$ folgt nun, daß mindestens ein Diagonalelement von $\hat{A}$ verschwindet. Damit ist der n-te Zeilenvektor von $\hat{A}$ der Nullvektor, also
$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \hat{A} < n\,,$$
und das bedeutet, daß die Zeilenvektoren linear abhängig sind.
„$\Leftarrow$“: Sei $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$, aber nicht $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$; ohne wesentliche Einschränkung sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann gilt
$$0 = \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \det A\,,$$
woraus unmittelbar $\det A = 0$ folgt.

12. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL(n, K)$. $\square$
13. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
Beweis. Fall 1: $\operatorname{rang} A < n \Rightarrow \operatorname{rang} A \cdot B < n \Rightarrow$
$$\det(A \cdot B) = 0 = 0 \cdot \det B = \det A \cdot \det B\,.$$
Fall 2: $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow A$ ist Produkt von r Elementarmatrizen Λ_l mit nichtverschwindender Determinante:
$$A = \Lambda_r \cdot \ldots \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_1\,,$$
wobei jedes Λ_l entweder die Form $S_{i_0}(\lambda)$ (Multiplikation der i_0-ten Zeile) mit $\lambda \neq 0$ oder die Form $Q_{i_0}^{k_0}(\lambda)$ (Addition des λ-fachen der k_0-ten Zeile zur i_0-ten Zeile) hat:
1. Für $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, und $\lambda \in K$ ist die Elementarmatrix $S_{i_0}(\lambda) = (\lambda_{ij}) \in K^{m,m}$ durch
$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq i_0, \\ \lambda, & i = j = i_0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$
definiert.
2. Für $i_0, k_0 \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i_0 \neq k_0$ ist die Elementarmatrix $Q_{i_0}^{k_0}(\lambda) = (\lambda_{ij}) \in K^{m,m}$ durch
$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \lambda, & i = i_0 \text{ und } j = k_0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$
definiert.
Der weitere Beweis ergibt sich nun durch Induktion nach r. $r = 1$: a) $A = \Lambda_1 = S_{i_0}(\lambda) \Rightarrow$
$$\det(A \cdot B) = \lambda \cdot \det B = \det \Lambda_1 \cdot B = \det A \cdot \det B\,.$$
b) $A = \Lambda_1 = Q_{i_0}^{k_0}(\lambda) \Rightarrow$
$$\det(A \cdot B) = \det B = \det \Lambda_1 \cdot \det B = \det A \cdot \det B\,.$$
Schluß von r auf $r + 1$: $A = \Lambda_{r+1} \cdot \Lambda_r \cdot \ldots \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_1$, $\hat{A} = \Lambda_r \cdot \ldots \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \Rightarrow$
$$\det(A \cdot B) = \det(\Lambda_{r+1} \cdot \hat{A} \cdot B) = \det \Lambda_{r+1} \cdot \det(\hat{A} \cdot B) =$$
$$= \det \Lambda_{r+1} \cdot \det \hat{A} \cdot \det B = \det(\Lambda_{r+1} \cdot \hat{A}) \cdot \det B\,. \ \square$$
14. *Für* $A \in GL(n; K)$ *gilt* $\det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$.
Beweis. Aus dem Multiplikationssatz folgt:
$$\det(A^{-1}) \cdot \det A = \det(A^{-1} \cdot A) = \det E_n = 1\,. \ \square$$
15. $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ *im allgemeinen.*

Hauptsatz. *Zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es genau eine Determinante.*
$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)}\,.$$
Beweis. 1., 3. trivial
2. Sei $A = (a_i)$ mit $a_{i_0} = a_{k_0}$, $1 \leq i_0 < k_0 \leq n$, und sei τ die Transposition, die i_0 und k_0

vertauscht. Dann gilt $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \dot{\cup} \mathfrak{A}_n\tau$ und damit

$$\begin{aligned}
\det \quad A &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} = \\
&= \sum_{\pi\in\mathfrak{A}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} + \\
&+ \sum_{\pi\in\mathfrak{A}_n\tau} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} = \\
&= \sum_{\pi\in\mathfrak{A}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} + \\
&+ \sum_{\pi\in\mathfrak{A}_n} \operatorname{sign} (\pi\tau) \cdot \alpha_{1\pi\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi\tau(n)} = \\
&= \sum_{\pi\in\mathfrak{A}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} - \\
&- \sum_{\pi\in\mathfrak{A}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{1\pi\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi\tau(n)} = \\
&= \sum_{\pi\in\mathfrak{A}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \big(\alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} - \alpha_{1\pi\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi\tau(n)}\big).
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\pi(i)} - \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\pi\tau(i)} =$$

$$= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0,k_0}}^{n} \alpha_{i\pi(i)}\big(\alpha_{i_0\pi(i_0)}\alpha_{k_0\pi(k_0)} - \alpha_{i_0\pi\tau(i_0)}\alpha_{k_0\pi\tau(k_0)}\big) =$$

$$= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0,k_0}}^{n} \alpha_{i\pi(i)}\big(\alpha_{i_0\pi(i_0)}\alpha_{k_0\pi(k_0)} - \alpha_{i_0\pi(k_0)}\alpha_{k_0\pi(i_0)}\big) = 0,$$

da aufgrund der Voraussetzung $a_{i_0} = a_{k_0}$

$$\alpha_{i_0\pi(i_0)} = \alpha_{k_0\pi(i_0)} \text{ und } \alpha_{k_0\pi(k_0)} = \alpha_{i_0\pi(k_0)}$$

ist. □

Abkürzung.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Spezialfälle. $n = 1$: $A = (\alpha_{11}) \Rightarrow |A| = \alpha_{11}$
$n = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}\,.$$

Sarrus**sche Regel.** (Anstelle einer Homepage: Pierre-Frédéric Sarrus, geboren 10. März 1798 in Saint-Affriques im Departement Aveyron (Süd-Frankreich), 1815 als Student nach Montpellier, 1821 dort Promotion - mit einer stark ins Physikalische gehenden Arbeit -

1823 „agrégé des sciences“ (eine Art Prüfung zum gymnasialen Oberlehrer oder eine Art Habilitation war) zuvor 1822 Lehrer für Mathematik und Physik am Gymnasium in Pezenas, 1827 Lehrer nur für Mathematik in Perpignan, 1829 Mathematik-Professor an der Fakultät der Akademie in Straßburg - die Universität Straßburg wurde 1790 aufgehoben und 1803 als Akademie für protestantische Theologie wiedergegründet und erst 1872 wieder zur Universität - 1839 oder 1840 Dekan bis 1852, 1840 Ritter der Ehrenlegion, 1858 emeritiert, am 20. November 1861 in Saint-Affriques verstorben.)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |A| \quad = \quad & \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \\ & -\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}\,. \end{aligned}$$

12. Mai 2000

Satz. $\det A = \det A^t$.

Beweis. Berechne

$$\det A^t = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot \alpha_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{\pi(n)n}$$

und beachte $\operatorname{sign} \pi = \operatorname{sign} \pi^{-1}$, sowie

$$\alpha_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{\pi(n)n} = \alpha_{1\pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi^{-1}(n)}\,,$$

woraus sich

$$\det A^t = \sum_{\pi^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi^{-1} \cdot \alpha_{1\pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi^{-1}(n)} = \det A$$

ergibt. □

Lemma. Für zusammengesetzte Matrizen gilt

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2\,.$$

Beweis. $A_1 \in K^{n_1,n_1}$, $A_2 \in K^{n_2,n_2}$, $n_1 + n_2 = n$. Für die Berechnung von $\det A$ sind nur solche Permutationen relevant, die die Menge $\{1, \ldots, n_1\}$ in sich überführen: Ist $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gegeben mit $\pi(i_0) > n_1$ für ein $i_0 \leq n_1$, so gibt es ein $i_1 > n_1$ mit $\pi(i_1) \leq n_1$, also $\alpha_{i_1\pi(i_1)} = 0$ und damit wird $\alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} = 0$. Es sind also nur die Permutationen zu berücksichtigen, die im Bild der injektiven Abbildung $\Phi : \mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \to \mathfrak{S}_n$ liegen, die gegeben ist durch

$$\Phi(\pi_1, \pi_2)(i) = \begin{cases} \pi_1(i), & 1 \leq i \leq n_1 \\ n_1 + \pi_2(i - n_1), & n_1 < i \leq n \end{cases}.$$

Wir setzen $\Phi_1 : \mathfrak{S}_{n_1} \to \mathfrak{S}_n$,

$$\Phi(\pi_1)(i) = \begin{cases} \pi_1(i), & 1 \leq i \leq n_1 \\ i, & n_1 < i \leq n \end{cases},$$

$\Phi_2 : \mathfrak{S}_{n_2} \to \mathfrak{S}_n$

$$\Phi_2(\pi_2)(i) = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq n_1 \\ n_1 + \pi_2(i - n_1), & n_1 < i \leq n \end{cases}$$

und erhalten

$$\Phi(\pi_1, \pi_2) = \Phi_1(\pi_1) \circ \Phi_2(\pi_2)\,,$$

sowie

$$\operatorname{sign} \Phi(\pi_1, \pi_2) = \operatorname{sign} \pi_1 \cdot \operatorname{sign} \pi_2\,.$$

Damit ergibt sich $\det A$ in der gewünschten Form. □

Bezeichnungen. Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$, $A \in K^{n,n}$, i', $j' \in \{1, \dots, n\}$. $A'_{i'j'}$ bezeichnet die Matrix in $K^{n-1,n-1}$, die aus A durch Streichen der i'-ten Zeile und j'-Spalte entsteht. Ferner definieren wir $A_{i'j'} = (\alpha'_{ij}) \in K^{n,n}$ durch

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{für } i \neq i' \text{ und } j \neq j', \\ 1, & \text{für } i = i' \text{ und } j = j', \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\det A_{i'j'} = (-1)^{i'+j'} \det A'_{i'j'}\,.$$

Beweis. Durch $i' - 1$ Zeilenvertauschungen und $j' - 1$ Spaltenvertauschungen entsteht aus $A_{i'j'}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{i'j'} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\det A_{i'j'} = (-1)^{i'+j'} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{i'j'} \end{pmatrix} = (-1)^{i'+j'} \det A'_{i'j'}\,. \ \square$$

Definition. Es sei $A \in K^{n,n}$. Die *zu A komplementäre* Matrix $\tilde{A} = (\tilde{\alpha}_{ij}) \in K^{n,n}$ ist gegeben durch

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \det A_{ji}\,.$$

Bezeichnung. Weiter setzen wir für $A = (a^1, \dots, a^n) \in K^{n,n}$, $j' \in \{1, \dots, n\}$ und $b \in K^n$:

$$A(j', b) = (a^1, \dots, a^{j'-1}, b, a^{j'+1}, \dots, a^n)\,,$$

das heißt $A(j', b)$ entsteht aus A, in dem die j'-te Spalte durch b ersetzt wird. Dann gilt für alle $i' \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A(j', e^{i'}) = \det A_{i',j'}\,.$$

Beweis. $A_{i'j'}$ entsteht aus $A(j', e^{i'})$, in dem man von den j-ten Spalten, $j \neq j'$ jeweils $\alpha_{i'j} e^{i'}$ abzieht. Damit ändert man die Determinante nicht. □

Pierre Simon Laplace, * Beaumont-en-Auge 28. März 1749, † Paris 5. März 1827, 1799 Innenminister, Förderer des Dezimalsystems.

Laplacescher Entwicklungssatz. *Für jedes $A \in K^{n,n}$, i', $j' \in \{1, \dots, n\}$ gilt:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i'+j} \alpha_{i'j} \det A'_{i'j}$$

(*Entwicklung nach der i'-ten Zeile*) *und*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j'} \alpha_{ij'} \det A'_{ij'}$$

(*Entwicklung nach der j'-ten Spalte*).

Beweis. Wir beweisen den Satz für die Entwicklung nach der j'-ten Spalte. Der andere Fall ergibt sich durch Transponieren. Zunächst bemerken wir:

$$a^{j'} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij'} e^i \,,$$

woraus wegen der Linearität der Determinante in der j'-ten Spalte folgt:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij'} \det A(j', e^i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij'} \det A_{ij'} \,. \quad \square$$

Satz. *Für alle $A \in K^{n,n}$ gilt:*

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \det A \cdot E_n \,.$$

Beweis. Wir berechnen die (i,k)-te Komponente von $\tilde{A} \cdot A$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_{ij} \alpha_{jk} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \det A_{ji} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \det A(i, e^j) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det A(i, \alpha_{jk} e^j) = \\ &= \det A(i, a^k) = \delta_{ik} \det A \,. \quad \square \end{aligned}$$

<u>16. Mai 2000</u>

Beispiel für den Laplaceschen Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \text{Entwicklung nach der zweiten Zeile} \\ &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \text{Entwicklung nach der dritten Spalte} \\ &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -44 \,. \end{aligned}$$

Anwendung auf Geichungssysteme: CRAMERsche Regel.

Für die eindeutige bestimmte Lösung $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = A^{-1}b$ des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in GL(n, K)$ und $b \in K^n$ gilt:

$$\gamma_i = \frac{\det A(i, b)}{\det A} \,.$$

Beweis. Aus dem vorherigen Satz folgt $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$, außerdem haben wir

$$b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e^j \,;$$

also gilt:

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\det A}\tilde{\alpha}_{ij}\beta_j = \\ &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}\beta_j \det A_{ji} = \\ &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}\beta_j \det A(i,e^j) = \\ &= \frac{\det A(i,b)}{\det A}\,. \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkungen. Für größere n ist die Bestimmung der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe der Cramerschen Regel, wenn überhaupt möglich, so doch im allgemeinen viel aufwendiger als das Gaußsche Elimminationsverfahren. Aber die Cramersche Regel hat im Falle des Grundkörpers $\mathbb{R}$ eine tieferliegende Konsequenz: Sind die Koeffizienten der erweiterten Matrix eines quadratischen Gleichungssystems stetige oder differenzierbare Funktionen von irgendwelchen Veränderlichen, so hängt auch die Lösung stetig oder differenzierbar von diesen Veränderlichen ab, solange nur die Koeffizientenmatrix invertierbar ist.
Aus den Eigenschaften der Determinante ergibt sich:

$$GL(n,\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R}\setminus 0)\,;$$

damit ist $GL(n,\mathbb{R})$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ offen. Aus der bewiesenen Eigenschaft der komplementären Matrix folgt dann, daß die Abbildung

$$GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}, A \mapsto A^{-1}$$

unendlich oft stetig partiell differenzierbar, ja sogar ein C^∞-Diffeomorphismus

$$GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$$

ist. $\square$

Lemma und Definition. *Es seien V ein K-Vektorraum mit* $\dim V = n < \infty$ *und* $f \in \operatorname{End}(V)$. *Für ein beliebiges Koordinatensystem* $\Phi : K^n \to V$ *sei*

$$\det f = \det(\Phi^{-1}\circ f\circ\Phi)$$

gesetzt. Dann ist der Wert von $\det f$ *unabhängig von der Wahl von* Φ*;* er wird als *Determinante* von f bezeichnet.
Beweis. Es sei Ψ ein weiteres Koordinatensystem für V und $A = \Phi^{-1}\circ\Psi$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\det(\Psi^{-1}\circ f\circ\Psi) &= \det((\Phi\circ A)^{-1}\circ f\circ(\Phi\circ A)) = \\ &= \det(A^{-1}\circ(\Phi^{-1}\circ f\circ\Phi)\circ A) = \\ &= \det(A^{-1})\cdot\det(\Phi^{-1}\circ f\circ\Phi)\cdot\det A = \\ &= (\det A)^{-1}\cdot\det A\cdot\det(\Phi^{-1}\circ f\circ\Phi) = \\ &= \det(\Phi^{-1}\circ f\circ\Phi)\,. \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung. Für einen Endomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt $|\det f|$ die durch f bewirkte Inhaltsveränderung an. Der von den Einheitsvektoren e^1 aufgespannte Kubus wird in das von den Vektoren $f(e^1)$, ..., $f(e^n)$ aufgespannte Parallelotop abgebildet, dessen Inhalt gleich dem Betrag von $\det(f(e^1),\ldots,f(e^n))$ ist.

Definition. Es sei V ein reeller Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$. Die Basen $=\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\tilde{\mathfrak{B}} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ von V heißen *gleichorientiert,* wenn die Determinante der Transformationsmatrix des Basiswechsels, das heißt die darstellende Matrix der Abbildung $\Phi_{\tilde{\mathfrak{B}}}^{-1} \circ \Phi_{\mathfrak{B}}$, positiv ist. Andernfalls heißen $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ *entgegengesetzt orientiert.*

Lemma. *„gleichorientiert" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V mit genau zwei Äquivalenzklassen.*

Beweis. 1. Reflexivität: Die Transformationsmatrix ist E_n, hat also die Determinante 1.
2. Symmetrie: Die in Frage stehenden Transformationsmatrizen sind invers zueinander, haben also gleiches Vorzeichen.
3. Transitivität: Das Produkt zweier Transformationsmatrizen mit positiver Determinante hat positive Determinante.
Zwei zu einer Basis entgegengesetzt orientierte Basen haben bezüglich dieser Transformationsmatrizen mit negativer Determinante; deren Produkt hat dann aber wieder positive Determinante. □

Definitionen. Es sei V ein reeller Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$. Eine Äquivalenzklasse gleichorientierter Basen heißt *Orientierung* von V; die Angabe einer Orientierung erfolgt im allgemeinen durch Angabe eines Repräsentanten. Ein *orientierter Vektorraum* ist ein Paar (V, or), bestehend aus einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und einer Orientierung or von V.
Die *positive* Orientierung von $\mathbb{R}^n$ ist die Orientierung, die die kanonische Basis enthält.

Zu gegebenen Vektoren $v = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ und $w = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ definiert man das *Vektorprodukt* als die formale Determinante

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} e_3 =$$
$$= (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)e_1 + (\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3)e_2 + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)e_3\,.$$

Lemma. *Sind v und w linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$, so ist $(v, w, v \times w)$ eine zur kanonischen Basis gleichorientierte Basis von $\mathbb{R}^3$.*