Die Transzendenz der Eulerschen Zahl $\boldsymbol{e}$

nach Jean-Paul Delahaye

Der in [1, Seiten 201-202] skizzierte Beweis der Transzendenz der Eulerschen Zahl $\boldsymbol{e}$ wird im folgenden ausgeführt. Ein alternativer Beweis, der auf Ideen von David Hilbert (1862–1943) beruht, findet sich in [2]

Vorbemerkung. Ist P ein *reelles Polynom,* das heißt, ein Polynom mit reellen Koeffizienten in der Unbestimmten x, so bezeichnet das Symbol P auch die Funktion

$$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\,,\ \ \xi \mapsto P(\xi)\,.$$

Das bedeutet, dass im Gegensatz zum üblichen Gebrauch der Definitionsbereich der zu dem Polynom gehörigen Polynomfunktion auf die Menge nicht negativen reellen Zahlen eingeschränkt wird.

Hilfssatz 1. *Es seien P ein Polynom mit reellen Koeffizienten und m eine natürliche Zahl* ($\in \mathbb{N}_0$) *mit* $\operatorname{Grad} P \leq m$. *Dann gilt*:

$$I(t) := \int_0^t e^{t-x} P(x)dx = e^t \cdot \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(t)\,. \tag{1}$$

Beweis durch Induktion nach m:
Induktionsanfang bei $m = 0$: $P(x) = a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t e^{t-x} a\,dx = a\int_0^t e^{t-x}dx = a \cdot (-e^{t-x})|_0^t = a \cdot (-e^0 + e^t) = e^t \cdot a - a$$

Induktionsschluss mit partieller Integration: Es sei $\operatorname{Grad} P \leq m + 1$.

Erinnerung: In Umkehrung der Produktregel

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

hat man:

$$u \cdot v = \int (u \cdot v)' = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$$

und damit

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v\,.$$

Mit

$$u(x) = P(x)\,,\ \ v'(x) = e^{t-x}$$

berechnet man:

$$\begin{aligned}
u'(x) &= P'(x) \\
v(x) &= -e^{t-x} \\
I(t) &= \int_0^t e^{t-x}P(x)dx = \int_0^t u\cdot v' = u\cdot v|_0^t - \int_0^t v\cdot u' = -e^{t-x}\cdot P|_0^t + \int_0^t e^{t-x}P'(x)dx = \\
&= e^t\cdot P(0) - P(t) + e^t\cdot\sum_{j=0}^{m} P^{(j+1)}(0) - \sum_{j=0}^{m} P^{(j+1)}(t) = \\
&= e^t\cdot\sum_{j=0}^{m+1} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m+1} P^{(j)}(t)\,.
\end{aligned}$$

Aus Grad $P \leq m+1$ folgt Grad $P' \leq m$ und damit ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar. □

Bezeichnung. Für ein reelles Polynom $P = \sum_{r=0}^m a_r x^r$ wird gesetzt:

$$P^* = \sum_{r=0}^{m} |a_r| x^r\,.$$

Hilfssatz 2. *Für reelle Polynome P, Q gilt:*

1. *Die Funktion P^* ist monoton wachsend (Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$!).*
2. *$|P| \leq P^*$.*
3. *Für alle $t \geq 0$ gilt: $|I(t)| \leq te^tP^*(t)$.*
4. *$(P\cdot Q)^* \leq (P^*\cdot Q^*)$.*

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{r=0}^{m} a_r x^r\,, \\
Q &= \sum_{s=0}^{n} b_s x^s\,.
\end{aligned}$$

1. Aus $0 \leq x < y \in \mathbb{R}$ und $|a_r| \geq 0$ folgt mit den Monotoniegesetzen zunächst $|a_r|x^r \leq |a_r|y^r$ für alle $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ und damit auch $P^*(x) \leq P^*(y)$.
2. $|P|(x) = |P(x)| = |\sum_{r=0}^m a_r x^r| \leq \sum_{r=0}^m |a_r x^r| = \sum_{r=0}^m |a_r|x^r = P^*(x)$.
3. $|I(t)| \leq \int_0^t |e^{t-x}P(x)|dx = \int_0^t e^{t-x}|P(x)|dx \overset{2.}{\leq} \int_0^t e^{t-x}P^*(x)dx \overset{1.}{\leq} \int_0^t e^tP^*(t)dx = te^tP^*(t)$.
4. Es gilt:
$$(P\cdot Q)(x) = P(x)\cdot Q(x) = \sum_{t=0}^{m+n}\sum_{r=0}^{t} a_r b_{t-r}\cdot x^t\,,$$
wobei $a_r = 0$ für $r > m$ und $b_{t-r} = 0$ für $t - r > n$ gesetzt ist. Damit folgt:
$$(P\cdot Q)^*(x) = \sum_{t=0}^{m+n}|\sum_{r=0}^{t} a_r b_{t-r}|\cdot x^t \leq \sum_{t=0}^{m+n}\sum_{t=0}^{t} |a_r|\cdot|b_{t-r}|\cdot x^t = P^*(x)\cdot Q^*(x) = (P^*\cdot Q^*)(x)\,. \square$$

Bezeichnung. Für n, $p \in \mathbb{N}$, p Primzahl, wird gesetzt

$$H = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p \in \mathbb{R}[x]\,.$$

Hilfssatz 3. *Für das reelle Polynom H gilt:*

1. *Die Koeffizienten des Polynoms H und aller seiner Ableitungen sind ganze Zahlen.*
2. *Der niedrigste von 0 verschiedene Koeffizient von H hat den Grad $p-1$ und ist gleich $(-1)^{np} \cdot (n!)^p$.*
3. $\operatorname{Grad} H = (n+1)p - 1 =: m$.
4. *Für $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ und $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sind die ganzen Zahlen $H^{(j)}(k)$ durch $p!$ teilbar; genauer gilt:*
$$H^{(j)}(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j < p\,, \\ p! \cdot c_{jk}, & p \leq j \leq m\,. \end{cases} \tag{2}$$
mit $c_{jk} \in \mathbb{Z}$.
5. *Für $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ gilt:*
$$H^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j < p-1\,, \\ (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p, & j = p-1\,, \\ p! \cdot c_{j0}, & p \leq j \leq m\,. \end{cases} \tag{3}$$
mit $c_{j0} \in \mathbb{Z}$.
6. *Für alle $x \in [0, n]$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt:*
$$H^*(k) \leq (2n)^m\,. \tag{4}$$

Beweis.

1. Die Koeffizienten auf der rechten Seite der binomischen Formel
$$(x-k)^p = \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} (-k)^{p-r} x^r$$
sind für alle $k \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Die Koeffizienten von H ergeben sich daraus durch Addition, Subtraktion und Multiplikation, also durch Operationen, die nicht aus dem Bereich der ganzen Zahlen herausführen. Eine Division wird nicht benötigt.
2. $p - 1 + n \cdot p = (n+1) \cdot p - 1$.
3. $(-1)^p \cdot (-2)^p \cdot \ldots \cdot (-n)^p = (-1)^{np} \cdot (n!)^p$.
4. *Erinnerung* an die Produktregel für höhere Ableitungen:
$$(u \cdot v)^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} u^{(j-i)} v^{(i)}\,.$$

(Beweis durch Induktion: Der Induktionsanfang bei $j = 0$ ist klar. Zum Induktionsschluss berechnet man:

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(j+1)} &= (\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} u^{(j-i)} v^{(i)})' = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (u^{(j-i)} v^{(i)})' = \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (u^{(j-i+1)} v^{(i)} + u^{(j-i)} v^{(i+1)}) = \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} u^{(j-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} u^{(j-i)} v^{(i+1)} = \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} u^{(j-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=1}^{j+1} \binom{j}{i-1} u^{(j+1-i)} v^{(i)} = \\
&= \binom{j}{0} u^{(j+1)} v^{(0)} + \sum_{i=1}^{j} \left(\binom{j}{i} + \binom{j}{i-1} \right) u^{(j+1-i)} v^{(i)} + \binom{j}{j} u^{(0)} v^{(j+1)} = \\
&= \binom{j+1}{0} u^{(j+1)} v^{(0)} + \sum_{i=1}^{j} \binom{j+1}{i} u^{(j+1-i)} v^{(i)} + \binom{j+1}{j+1} u^{(0)} v^{(j+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} u^{(j+1-i)} v^{(i)} \,.)
\end{aligned}$$

Für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ werden die folgenden Polynome definiert:

$$\begin{aligned}
G_k &= (x-k)^p \\
H_k &= \frac{H}{G_k} \,.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$H = G_k \cdot H_k$$

und

$$G_k^{(j)}(x) = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-j)!} (x-k)^{p-j}, & 0 \le j \le p \,, \\ 0, & p < j \end{cases}$$

sowie speziell an der Stelle k:

$$G_k^{(j)}(k) = \begin{cases} p!, & j = p \,, \\ 0, & j \neq p \,. \end{cases}$$

Für die Ableitungen von H ergibt sich daraus

$$H^{(j)}(k) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} G_k^{(j-i)}(k) \cdot H_k^{(i)}(k) = \begin{cases} 0, & 0 \le j < p \,, \\ \dbinom{j}{j-p} p! \cdot H_k^{(j-p)}(k), & p \le j \le m \,. \end{cases}$$

Die Polynome H_k selbst und alle ihre Ableitungen haben ganzzahlige Koeffizienten; sie haben an den Stellen k nur ganzzahlige Werte. Damit folgt

$$c_{jk} = \binom{j}{j-p} \cdot H_k^{(j-p)}(k) \in \mathbb{Z} \,,$$

wie behauptet.

5. Es werden die folgenden Polynome definiert:

$$\begin{aligned} G_0 &= x^{p-1} \\ H_0 &= \frac{H}{G_0}\,; \end{aligned}$$

es handelt sich um reelle Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann gilt

$$H = G_0 \cdot H_0$$

und

$$G_0^{(j)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(p-1)!}{(p-1-j)!} x^{p-1-j}, & 0 \le j < p\,, \\ 0, & p \le j \end{cases}$$

sowie speziell an der Stelle 0:

$$G_0^{(j)}(k) = \begin{cases} (p-1)!, & j = p-1\,, \\ 0, & j \neq p-1\,. \end{cases}$$

und

$$H_0'(x) = p \cdot \tilde{H}(x)\,,$$

wobei $\tilde{H}$ das Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten bezeichnet, das gegeben ist durch

$$\tilde{H}(x) = (x-1)^p \cdot \ldots \cdot (x-n)^p \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}\,.$$

Für die Ableitungen von H ergibt sich daraus

$$H^{(j)}(0) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} G_0^{(j-i)}(0) \cdot H_0^{(i)}(0) = \begin{cases} 0, & 0 \le j < p-1\,, \\ \dbinom{j}{j+1-p} (p-1)! \cdot H_0^{(j+1-p)}(0), & p-1 \le j \le m\,. \end{cases}$$

Damit folgt

$$H^{(p-1)}(0) = (p-1)! \cdot H_k(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

und für $j \ge p$

$$H^{(j)}(0) = \binom{j}{j+1-p} (p-1)! \cdot H_0^{(j+1-p)}(0) = p! \binom{j}{j+1-p} \tilde{H}^{(j-p)}(0)\,.$$

Das Polynom $\tilde{H}$ selbst und alle seine Ableitungen haben ganzzahligen Koeffizienten und damit an der Stelle 0 nur ganzzahlige Werte. Also ist

$$c_{j0} = \binom{j}{j+1-p} \tilde{H}^{(j-p)}(0) \in \mathbb{Z}\,.$$

6. Mit den vorher eingeführten Bezeichnungen gilt:

$$H = G_0 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n\,,$$

also nach Hilfssatz 2, Teil 4,

$$H^* \le \prod_{k=0}^{n} G_k^*\,.$$

Für $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ hat man ferner aus demselben Grund

$$G_k^*(x) \leq (x+k)^p \,.$$

Damit ergibt sich

$$H^*(x) \leq x^{p-1}(x+1)^p(x+2)^p \cdots (x+n)^p \,.$$

Im betrachten Intervall ist jeder Faktor kleiner-gleich 2n, woraus die Behauptung folgt. □

Beweis der Transzendenz der Eulerschen Zahl *e*.

Annahme. Die Zahl $\boldsymbol{e}$ ist algebraisch,

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0 \tag{5}$$

mit $a_k \in \mathbb{Z}$ für alle $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ und $a_0,\ a_n \neq 0$.
Zur Herstellung des Widerspruchs betrachten wir den Ausdruck mit $P = H$

$$J := a_0 I(0) + a_1 I(1) + a_2 I(2) + \ldots + a_n I(n) \,. \tag{6}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{k=0}^{n} a_k I(k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_k(e^k \cdot H^{(j)}(0) - H^{(j)}(k)) = \quad \text{nach (1)} \\
&= \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \cdot H^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k H^{(j)}(k) = -\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k H^{(j)}(k) = \quad \text{nach (5)} \\
&= a_0(p-1)!(-1)^{np}(n!)^p + p!c = \quad \text{nach (2) und (3)} \\
&= (p-1)!(a_0(-1)^{np}(n!)^p + pc)
\end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{Z}$. Wählen wir $p > n,\ |a_0|$, so ist $a_0(-1)^{np}(n!)^p$ sicherlich nicht durch p teilbar und damit folgt $J \neq 0$, genauer:

$$|J| \geq (p-1)! \,. \tag{7}$$

Andererseits haben wir nach (4):

$$|I(k)| = |\int_0^k e^{k-x} H(x)dx| \leq \int_0^k |e^{k-x} H(x)|dx \leq \int_0^k e^{k-x} H^*(x)dx \leq ke^k (2n)^m \,,$$

also

$$|J| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| ke^k (2n)^{(n+1)p-1} = r \cdot s^p \tag{8}$$

mit

$$r = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n} |a_k| ke^k \in \mathbb{R}^+ \,, \quad s = (2n)^{n+1} \,.$$

Erinnerung. Für alle $s \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{s^p}{p!} = 0 \,.$$

(*Beweis.* Das $(p+1)$-ste Folgenglied entsteht aus dem p-ten Glied durch Multiplikation mit dem Faktor $s/(k+1)$. Bei gegebenem s gilt für alle $p > 2|s|$, daß der hinzukommende Faktor kleiner als $1/2$ ist, also von einer bestimmten Stelle an das nächste Glied immer - dem Betrage nach - kleiner ist als die Hälfte des vorangehenden. Damit muß es sich aufgrund des Axioms von Archimedes-Eudoxus um eine Nullfolge handeln.)

Da es unendlich viele, also beliebig große Primzahlen gibt, kann man die Primzahl p auch noch so groß wählen, dass gilt

$$\frac{s^{p-1}}{(p-1)!} < \frac{1}{r \cdot s}\,, \tag{9}$$

und man erhält

$$1 \overset{(7)}{\leq} \frac{|J|}{(p-1)!} \overset{(8)}{\leq} r \cdot s \cdot \frac{s^{p-1}}{(p-1)!} \overset{(9)}{<} 1\,,$$

den gewünschten Widerspruch. □

Literatur

[1] Jean-Paul Delahaye: π – *die Story,* Basel – Boston – Berlin: 1999 Birkhäuser

[2] Rudolf Fritsch: Transzendenz von e im Leistungskurs, *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **42** (1989), Seiten 45-80 – im Internet unter: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/euler.pdf