Schwerpunkte von Vierecken*

von Prof. Dr. Rudolf Fritsch, Prof. Dr. Günter Pickert

München, Gießen

1 Einleitung

Für nichtüberschlagene ebene Polygone gibt es drei Arten von Schwerpunkten: Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt. Bei Dreiecken stimmen Ecken- und Flächenschwerpunkt überein; der Kantenschwerpunkt ist der Spieker-Punkt (X(10) in [4]), der Mittelpunkt des Spieker-Kreises, des Inkreises des Seitenmittenmittendreiecks. Die drei Punkte fallen bei einem Dreieck dann und nur dann zusammen, wenn es gleichseitig ist.

Bei Vierecken ist die Situation komplizierter. Eine Zusammenfassung der grundlegenden Tatsachen hat Karl Seebach in [10] gegeben. Kurze Beweise für die Äquivalenz „Ecken- und Flächenschwerpunkt fallen zusammen $\Leftrightarrow$ Das Viereck ist ein Parallelogramm" findet man in [2]; eine Abschwächung der Bedingung der Planarität wird in [9] gezeigt.

Die folgenden Überlegungen wurden durch die Beobachtung von Hans Walser [14] veranlasst, dass der Diagonalenschnitpunkt, der Eckenschwerpunkt und der Flächenschwerpunkt eines konvexen Vierecks, das kein Parallelogramm ist, paarweise verschieden, aber kollinear sind.[1]

2 Vorbereitung und Notation

Wir betrachten Vierecke $ABCD$ mit den Ecken A, B, C, D – keine drei auf einer Geraden –, den Seiten $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, und den Diagonalen AC, BD, die sich in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkt S schneiden; die Diagonalen werden dabei je nach Bedarf als Geraden oder Strecken aufgefasst. Die Existenz des Schnittpunktes S liefert, dass wir nur ebene Vierecke untersuchen. Sie können konvex, konkav oder überschlagen sein; die Diagonalen können im letzten Fall parallel sein. Die Längen der Seiten

* Eine englische Übersetzung dieser Arbeit erscheint in mehreren Teilen in CRUX MATHEMATICORUM.

[1] Kurz vor Einreichung dieser Arbeit stellten wir fest, dass Walsers Beobachtung bereits im Jahr 1994 von Karl Seebach (1912-2007) notiert wurde [11]. Da die Arbeiten [11] und [14] schwer erhältlich sind und unser Ansatz zum Beweis sich von beiden unterscheidet, veröffentlichen wir unsere diesbezüblichen Überlegungen trotzdem.

werden in üblicher Weise der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet. Davon zu unterscheiden sind die Ortsvektoren der Ecken $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ in Bezug auf einen jeweils festzulegenden Ursprung bei vektoralgebraischen Überlegungen. Wir diskutieren den Eckenschwerpunkt $S_{\mathcal{E}}$, den Kantenschwerpunkt $S_{\mathcal{K}}$ und den Flächenschwerpunkt $S_{\mathcal{F}}$ mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{s_{\mathcal{E}}}$, $\overrightarrow{s_{\mathcal{K}}}$ beziehungsweise $\overrightarrow{s_{\mathcal{F}}}$. Der Eckenschwerpunkt kann mit einer Ecke zusammenfallen; das tritt bei konkaven Vierecken auf, bei denen die einspringende Ecke der Eckenschwerpunkt des von den übrigen Ecken gebildeten Dreiecks ist.

3 Die Seebach-Walser-Gerade eines Vierecks

Ein Schlüssel zu der Beobachtung von Hans Walser liegt in dem folgenden

Lemma *Der Eckenschwerpunkt eines nichtüberschlagenen ebenen Vierecks, das kein Parallelogramm ist, liegt auf der Verbindungsstrecke von einer Ecke zum (Ecken-) Schwerpunkt des von den übrigen Ecken gebildeten Dreiecks und teilt diese Strecke im Verhältnis 3:1.*

Das kann man auf drei Weisen begründen. Physikalisch versieht man alle Ecken mit der gleichen Masse 1. In diesem System von Massenpunkten ersetzt man drei Punkte durch ihren Schwerpunkt mit der Masse 3. Dann liegt der Schwerpunkt des Gesamtsystems auf der Verbindungsstrecke zum vierten Punkt und teilt diese nach Archimedes' Hebelgesetz im Verhältnis 1:3.

Ein vektoralgebraischer Beweis ist genauso einfach, wenn man der Idee in [9] folgt, den Eckenschwerpunkt als Ursprung für ein Koordinatensystem zu wählen. Dann folgt aus der allgemeinen Beschreibung des Eckenschwerpunktes

$$\overrightarrow{s_{\mathcal{E}}} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

die Gleichung

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o}. \tag{1}$$

Für $X \in \{A, B, C, D\}$ seien S_X der Eckenschwerpunkt des von den von X verschiedenen Ecken des Vierecks gebildeten Dreiecks und $\overrightarrow{s_X}$ der entsprechende Ortsvektor. Damit berechnen wir

$$\overrightarrow{s_A} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = -\frac{1}{3}\vec{a}, \ \ldots$$

woraus die Behauptung folgt.

Ein rein synthetischer Beweis des Lemmas ist etwas aufwendiger. Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Strecke $[S_A A]$ und schließen zunächst den Sonderfall aus, dass der Mittelpunkt F der Diagonalen $[BD]$ auf der Diagonalen AC (mit Mittelpunkt E) liegt.

Dann haben wir das Dreieck ACF, dessen Seiten innen von den Punkte E, SA und SC geteilt werden. Für die folgende Argumente verwenden wir Teilverhältenisse. Deren Vorzeichen werden in der Literatur verschieden verwendet. Bei uns ist das Teilverhältnis $\tau(X;Y,Z)$ eines Punktes X in Bezug auf die Punkte Y und Z, X, Y, Z kollinear, $X \neq Z$, definiert durch

$$\overrightarrow{YX} = \tau(X;Y,Z) \cdot \overrightarrow{XZ}.$$

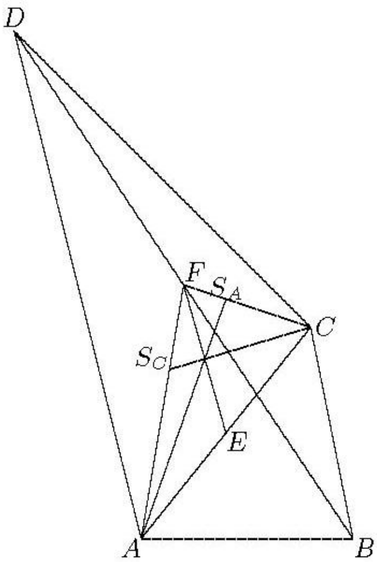
So ist $\tau(X;Y,Z)$ genau dann positiv, wenn X ein innerer Punkt der Verbindungsstrecke der Punkte Y und Z ist, und negativ, wenn X auf der Geraden YZ außerhalb dieser Strecke liegt.

Damit berechnen wir:

$$\tau(E;A,C) \cdot \tau(S_A;C,F) \cdot \tau(S_C;F,A) = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Nach dem Satz von al Mu'taman-Möbius folgt daraus, dass die Geraden FE, AS_A, CS_C entweder einen Punkt gemeinsam haben oder paarweise parallel sind[2]. Da die Punkte A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden EF liegen, die Punkte C und S_A aber auf der gleichen Seite, liegen A und S_A auf verschiedenen Seiten der Geraden EF, also haben die Geraden EF und AS_A, einen Schnittpunkt W; sie sind nicht parallel. Und dieser Punkt W liegt auch auf der Geraden CS_C.

[2]Die für diesen Schluss benötigte Aussage wird häufig als „Umkehrung des Satzes von Ceva" bezeichnet. Der maurische König von Saragossa Yussuf al-Mu'taman ibn Hūd (geb. nach 1028, gest. 1085) fand diesen Satz der später dem Italiener Giovanni Ceva (1647-1734) zugeschrieben wurde. August Ferdinand Möbius (1790-1868) führte das Vorzeichen ein, das den Satz umkehrbar machte.



Nun nehmen wir das Dreieck AEF, dessen Seiten von der Geraden CS_C in den Punkten C, W, S_C geschnitten werden. Aus dem Satz von Menelaos folgt

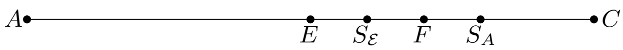
$$-1 = \tau(C; A, E)\cdot\tau(W; E, F)\cdot\tau(S_C; F, A) =$$

$$= -\frac{2}{1}\cdot\tau(W; E, F)\cdot\frac{1}{2} = -\tau(W; E, F),$$

also $\tau(W; E, F) = 1$, das heißt, W ist der Mittelpunkt der Strecke $[EF]$, der Eckenschwerpunkt $S_{\mathcal{E}}$. Damit liegt der Punkt $S_{\mathcal{E}}$ in der Strecke S_AA. Das Teilverhältnis berechnen wir mit dem Summensatz von van Aubel:
$\tau(S_{\mathcal{E}}; A, S_A) = \tau(E; A, C) + \tau(S_C; A, F) = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} = 3 : 1.$
wie gewünscht.

Nun ist noch der Fall zu betrachten, bei dem der Mittelpunkt F der Diagonalen $[BD]$ auf der Diagonalen AC liegt, das Viereck $ABCD$ also ein schiefer Drachen ist. Nun liegen alle für unsere Überlegungen relevanten Punkte auf der Diagonalen AC: die Ecken A end C, die Diagonalenmittelpunkte E und F, the Eckenschwerpunkt S_A des Dreiecks BCD, da CF eine Seitenhalbierende dieses Dreiecks ist, und auch der Eckenschwerpunkt $S_{\mathcal{E}}$, das ist der Mittelpunkt der Strecke $[EF]$. Leider sind weitere Unterfälle zu unterscheiden.

Wenn das Viereck $ABCD$ konvex ist, sind die Punkte F und $S_{\mathcal{E}}$ innere Punkte der Strecke $[AC]$ und der Punkt S_A ist ein innerer Punkt der Strecke $[FC]$ außerhalb der Strecke $[AF]$.



Wir berechnen die Abstände

$$|AS_A| = |AF| + \frac{1}{3}|FC| = |AF| + \frac{1}{3}(|AC| - |AF|) = \frac{2}{3}(|AE| + |AF|),$$

$$|AS_{\mathcal{E}}| = \frac{1}{2}(|AE| + |AF|) = \frac{1}{2}(|AE| + |AF|),$$

was der erhoffte Ergebnis liefert:

$$|AS_A| : |AS_{\mathcal{E}}| = 4 : 3.$$

Wenn das Viereck $ABCD$ konkav ist, dann folgt aus der Voraussetzung, dass der Punkt F auf der Geraden AC liegt, dass entweder die Ecke C oder die Ecke A die einspringende Ecke ist. Im ersten Fall erhalten wir die gleichen Formeln für die Abstände $|AS_A|$ und $|AS_{\mathcal{E}}|$, im zweiten Fall berechnen wir

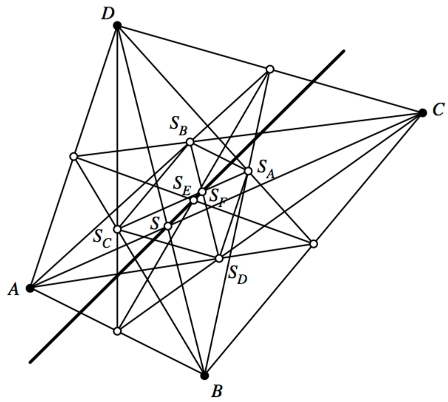
$$|AS_A| = \frac{1}{3}\,|3 \cdot |AC| - 2 \cdot |CF||\,,$$

$$|AS_{\mathcal{E}}| = \frac{1}{4}\,|3 \cdot |AC| - 2 \cdot |CF||$$

was auf dasselbe Verhältnis führt. Damit ist auch der dritte Beweis des Lemmas abgeschlossen.

Die vorstehenden Überlegungen bestätigen eine Anmerkung von Hanfried Lenz [6], der etwa das Folgende ausführt: Man kann Glück haben, in der Elementargeometrie einen eleganten synthetischen Beweis zu finden; aber meistens sind viele und lästige Fallunterscheidungen notwendig und der analytische Beweis geht allgemein durch.

Aus dem Lemma folgt nun leicht der **Satz** [Seebach 1994, Walser 2012]. *Der Eckenschwerpunkt $S_{\mathcal{E}}$ eines nichtüberschlagenen ebenen Vierecks teilt die Verbindungsstrecke vom Diagonalenschnittpunkt S zum Flächenschwerpunkt $S_{\mathcal{F}}$ im Verhältnis 3 : 1* [11], [14]. Das Lemma liefert, dass die zentrische Streckung mit dem Zentrum $S_{\mathcal{E}}$ und dem Verhältnis 3:1 das Viereck $ABCD$ auf das Viereck $S_AS_BS_CS_D$ abbildet (siehe auch [5]).



Da bei Dreiecken Ecken- und Flächenschwerpunkt übereinstimmen, ist der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks $S_AS_BS_CS_D$ der Flächenschwerpunkt des Vierecks $ABCD$. Das ist offensichtlich für konvexe Vierecke, gilt auch im konkaven Fall [10]. Damit liegen die drei genannten Punkte auf einer Geraden. Für diese schlagen wir den Namen *Seebach-Walser-Gerade* (des Vierecks) vor, wenigstens solange bis jemand herausfindet, dass sie schon vor 1994 betrachtet wurde; wir behalten Walsers Namen dabei, weil er uns auf diesen Sachverhalt aufmerksam gemacht hat.

Für überschlagene Vierecke macht der Begriff des Flächenschwerpunkts eigentlich keinen Sinn. Aufgrund des Satzes von Walser könnte man allerdings den Bildpunkt des Diagonalenschnittpunkts unter der zentrischen Streckung mit dem Eckenschwerpunkt als Zentrum und dem Faktor -1/3 als Analogon des Flächenschwerpunktes bei überschlagenen Vierecken mit nichtparallelen Diagonalen definieren.

4 Intermezzo zum Satz von van Aubel

Henricus Hubertus van Aubel (* Maastricht 20. November 1830, † Antwerpen 3. Februar 1906) unterrichtete Mathematik am Athenäum in Antwerpen. Ihm werden zwei elementargeometrische Sätze zugeschrieben. Im voranstehenden Beweis wurde der „Summensatz” verwendet.

Satz. *Es seien A', B', C' von den Ecken verschiedene Punkte auf den Seiten $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ des Dreiecks ABC, derart dass sich die Geraden AA', BB', CC' in einem Punkt P schneiden. Dann gilt für die Teilverhältnisse*

$$\tau(P; A, A') = \tau(B'; A, C) + \tau(C'; A, B).$$

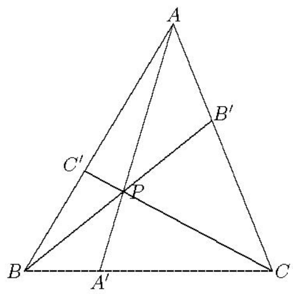
Da ein Beweis für diesen Sachverhalt in der Literatur nicht leicht zu finden ist, sei hier kurz einer angegeben. Den Schlüssel liefert folgende Formel: Für drei paarweise verschiedene, aber kollineare Punkte A, B, C gilt:

$$\tau(A; B, C) + \tau(C; B, A) = -1. \tag{2}$$

Dies lässt sich folgendermaßen einsehen: Mit den Abkürzungen $\alpha = \tau(A; B, C)$, $\gamma = \tau(C; B, A)$ hat man $\overrightarrow{BA} = \alpha\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \gamma\overrightarrow{CA}$, womit man berechnet

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -(\alpha + \gamma)\overrightarrow{CA}$$

Wegen $C \neq A$ folgt daraus die Behauptung.



Zum Beweis des Satzes von van Aubel wendet man nun den Satz von Menelaos auf die Dreiecke ABA' und ACA':

$$\tau(C'; A, B) \cdot \tau(C; B, A') \cdot \tau(P; A', A) = -1,$$

$$\tau(B'; A, C) \cdot \tau(B; C, A') \cdot \tau(P; A', A) = -1,$$

also

$$\tau(C'; A, B) = -\tau(C; A', B) \cdot \tau(P; A, A'),$$
$$\tau(B'; A, C) = -\tau(B; A', C) \cdot \tau(P; A, A').$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\tau(C'; A, B) + \tau(B'; A, C) &= -(\tau(C; A', B) + \tau(B; A', C)) \cdot \tau(P; A, A') \\ &\overset{(2)}{=} \tau(P; A, A').\end{aligned}$$

5 Eckenschwerpunkt gleich Flächenschwerpunkt

Der Satz von Seebach-Walser führt zu einem weiteren einfachen Beweis für die Tatsache, dass ein nichtüberschlagenes ebenes Viereck, bei dem Ecken- und Flächenschwerpunkt zusammenfallen, ein Parallelogramm ist. Aufgrund des Satzes stimmt ja dann auch der Diagonalenschnittpunkt mit diesen Schwerpunkten überein. Wenn dieser Punkt wieder als Ursprung angenommen wird, der Ursprung also auf den Diagonalen liegt, so sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ linear abhängig, ebenso die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{d}$. Da nach der allgemeinen Voraussetzung der Diagonalenschnittpunkt von den Ecken verschieden ist, haben wir $\vec{a} \neq 0 \neq \vec{b}$. Also gibt es Skalare r und s, derart dass gilt $\vec{c} = r\vec{a}$ und $\vec{d} = s\vec{b}$. Damit berechnen wir

$$\vec{o} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (1 + r) \cdot \vec{a} + (1 + s) \cdot \vec{b}.$$

Da die Ecke B nicht auf der Diagonalen AC, also der Ursprungsgeraden durch die Ecke A liegt, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, woraus r = s = -1 folgt. Damit ist das Viereck $ABCD$ punktsymmetrisch zum Ursprung, also ein Parallelogramm.

6 Eckenschwerpunkt gleich Kantenschwerpunkt

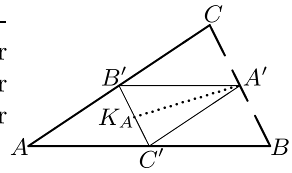
Zur Bestimmung des Kantenschwerpunkts $S_{\mathcal{K}}$ eines Viereckes ersetzt man das homogene Massensystem durch ein System von Massenpunkten. Die Massen der einzelnen Kanten (= Seiten des Vierecks) sind proportional zur ihren Längen a, b, c, d und man ersetzt das homogene Massensystem durch ein System von vier Massenpunkten, indem man die Masse jeder Kante in ihrem Mittelpunkt konzentriert. Bei einem Parallelogramm ist der Kantenschwerpunkt auch wieder der Diagonalenschnittpunkt und gleich dem Eckenschwerpunkt. Im allgemeinen hat man damit für den Kantenschwerpunkt die Darstellung

$$\vec{s_{\mathcal{K}}} = \frac{1}{2(a+b+c+d)} \Big(a(\vec{a}+\vec{b}) + b(\vec{b}+\vec{c}) + c(\vec{c}+\vec{d}) + d(\vec{d}+\vec{a}) \Big). \quad (3)$$

Die synthetische Ermittlung des Kantenschwerpunkts verläuft allerdings auf einer anderen Grundlage. Dazu sei zunächst daran erinnert, wie man den Kantenschwerpunkt eines Zweibeins ermittelt.

Es wird ein Zweibein aus den Strecken $[AB]$ und $[AC]$ mit den Längen c und b betrachtet, die Punkte A, B, C nicht kollinear.

Der Kantenschwerpunkt K_A liegt auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte C' und B' der Strecken $[AB]$ beziehungsweise $[AC]$, also der Mittelparallelen des Dreiecks ABC parallel zur Seite $[BC]$, und teilt diese im Verhältnis $a : c$.



Damit ist der Punkt K_A der Schnittpunkt der Mittelparallelen mit Innenwinkelhalbierenden des Dreiecks $A'B'C'$ durch die Ecke A', den Mittelpunkt der Strecke $[BC]$. Dahinter steckt der bekannte Satz: *Eine Innenwinkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.* Bei einem Viereck $ABCD$ hat man vier Zweibeine mit den Schwerpunkten K_A, K_B, K_C, K_D. Der Kantenschwerpunkt $S_{\mathcal{K}}$ des Vierecks ist dann der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks $K_AK_BK_CK_D$.

Nun sei der Kantenschwerpunkt gleich dem Eckenschwerpunkt und dieser Punkt sei wieder als Ursprung genommen. Dann bekommt man aus der Formel (3)zunächst

$$\vec{o} = a(\vec{a}+\vec{b}) + b(\vec{b}+\vec{c}) + c(\vec{c}+\vec{d}) + d(\vec{d}+\vec{a}). \tag{4}$$

Mit der nach Gleichung (1) möglichen Substitution $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ erhält man

$$\vec{o} = (a-c)(\vec{a}+\vec{b}) + (b-d)(\vec{b}+\vec{c}) = (a-c)\vec{a} + (a-c+b-d)\vec{b} + (b-d)\vec{c},$$

also

$$-(a+b-c-d)\vec{b} = (a-c)\vec{a} + (b-d)\vec{c}.$$

Mit der entsprechenden Substitution $\vec{b} = -\vec{a} - \vec{c} - \vec{d}$ ergibt sich analog

$$-(a+b-c-d)\vec{d} = (b-d)\vec{a} + (a-c)\vec{c}.$$

Falls $a+b-c-d \neq 0$, so hat man

$$-\vec{b} = \frac{a-c}{a+b-c-d}\vec{a} + \frac{b-d}{a+b-c-d}\vec{c},$$

$$-\vec{d} = \frac{b-d}{a+b-c-d}\vec{a} + \frac{a-c}{a+b-c-d}\vec{c}.$$

Damit liegen die Spiegelbilder der Ecken B und D am Eckenschwerpunkt auf der Geraden AC, das heißt, die Diagonalen AC und BD sind parallel.

Diesen Fall schließen wir zunächst aus und nehmen an

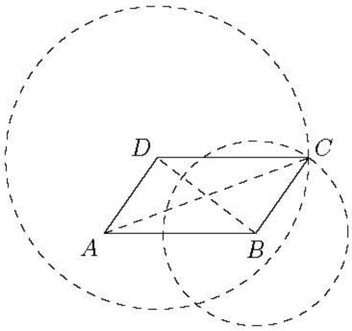
$$a+b-c-d = 0. \tag{5}$$

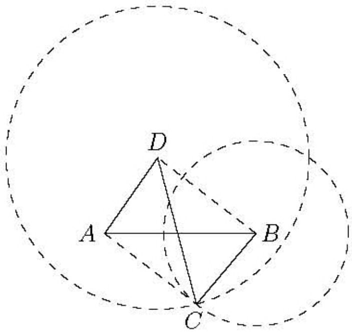
Die obigen Gleichungen vereinfachen nun sich zu

$$\vec{o} = (a-c)\vec{a} + (b-d)\vec{c},$$

$$\vec{o} = (b-d)\vec{a} + (a-c)\vec{c}.$$

Wäre nun $a \neq c$, so wäre auch $\vec{b} \neq \vec{d}$ und wegen $a - c = -(b - d)$ nach (5) erhielte man aus diesen Gleichungen den Widerspruch $\vec{a} = \vec{c}$. Also ist[3] $a = c$ und damit $b = d$. Ausgehend vom Dreieck ABD findet man die Ecke C als einen Schnittpunkt der Kreise um B mit Radius $b = d$ und um D mit Radius $a = c$. Diese beiden Kreise haben zwei Schnittpunkte.





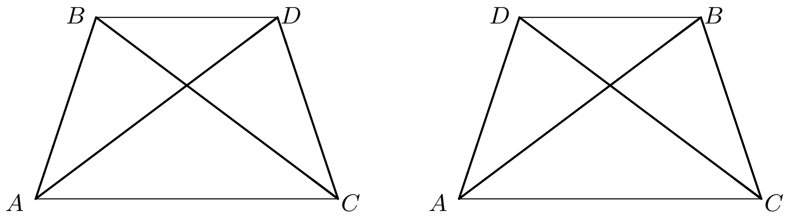
In einem Fall erhält man ein Parallelogramm, im anderen ein überschlagenes Viereck mit parallelen Diagonalen, was wir zunächst außer Betracht lassen. Damit ist gezeigt

Satz. *Der Kantenschwerpunkt eines Vierecks mit nicht-parallelen Diagonalen stimmt genau dann mit dem Eckenschwerpunkt überein, wenn das Viereck ein Parallelogramm ist.*

Ähnlich beweist man, dass der Kantenschwerpunkt eines Dreiecks dann und nur dann mit dem Eckenschwerpunkt zusammenfällt, wenn es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt.

Nun betrachten wir noch Vierecke mit parallelen Diagonalen; es handelt sich um überschlagene Vierecke. Falls (5) gilt, haben wir aufgrund der eben angestellten Überlegung achsensymmetrische überschlagene Vierecke mit zur Achse senkrechten Diagonalen, bei den Ecken- und Kantenschwerpunkt zusammenfallen.

[3] Für konvexe Vierecke ist dies eine Charakterisierung der Parallelogramme.



Um Vierecke mit $a+b-c-d \neq 0$ – also mit parallelen Diagonalen – zu untersuchen führen wir Koordinaten ein und zwar so, dass die x-Achse Mittelparallele der Diagonalen; ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Diagonalen AC, BD durch die Gleichungen $y=-1$ beziehungsweise $y=1$ beschrieben werden. Unter Benutzung der Gleichung (1) setzen wir

$$A(a_1,-1),\ \ B(b_1,1),\ \ C(c_1,-1),\ \ D(-a_1-b_1-c_1,1).$$

Die Mittelpunkte der Vierecksseiten haben alle die zweite Koordinate 0, sodass die Bedingung aus Gleichung (4) nur eine Bedingung an die erste Koordinate ist und in der Form

$$(a_1+b_1)\cdot(a-c)=(b_1+c_1)\cdot(d-b)$$

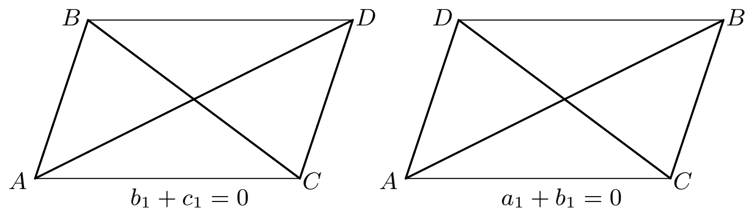
geschrieben werden kann. Dies ist eine Wurzelgleichung, da gilt

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(b_1-a_1)^2+4a_2^2}, & c &= \sqrt{(b_1-c_1)^2+4a_2^2},\\ b &= \sqrt{(a_1+b_1+2c_1)^2+4a_2^2}, & d &= \sqrt{(2a_1+b_1+c_1)^2+4a_2^2}. \end{aligned}$$

Durch das übliche Verfahren der Quadrierung kann sie in eine polynomiale Gleichung transformiert werden. Wenn man in jedem Schritt soweit möglich faktorisiert (am besten mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems) erhält man die folgenden polynomialen Faktoren

$$a_1-c_1,\ a_1+2b_1+c_1,\ b_1+c_1,\ a_1+c_1,\ a_1+b_1.$$

Mindestens einer dieser Terme muss verschwinden. Die ersten beiden können nicht 0 sein, da dies entweder $A=C$ oder $B=D$ zur Folge hätte. Ist $b_1+c_1=0$. so haben wir $\vec{b}=-\vec{c}$ nd $\vec{a}=-\vec{d}$, das Viereck ist punktsymmetrisch (aber kein Parallelogramm sondern überschlagen). Dasselbe gilt für $a_1+b_1=0$, was $\vec{a}=-\vec{b}$, $\vec{c}=-\vec{d}$ liefert. In beiden Fällen ist der Ursprung sowohl Ecken- als auch Kantenschwerpunkt.



Schließlich folgt aus $a_1+c_1 = 0$ zunächst $a = c$, $b = d$ und damit $a+b-c-d = 0$, was der aktuellen Voraussetzung widerspricht.

Zusammenfassend erhalten wir den

Zusatz. *Ecken- und Kantenschwerpunkt eines Vierecks mit parallelen Diagonalen fallen genau dann zusammen, wenn das Viereck entweder achsensymmetrisch mit den Diagonalen senkrecht zur Achse oder punktsymmetrisch ist.*

7 Flächenschwerpunkt gleich Kantenschwerpunkt

Bei Parallelogrammen fallen Diagonalenschnittpunkt, Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt zusammen. Für nicht-überschlagene Vierecke gilt eine Art Umkehrung: Fällt der Eckenschwerpunkt mit dem Flächenschwerpunkt oder dem Kantenschwerpunkt zusammen, so handelt es sich um ein Parallelogramm. Man könnte nun vermuten, dass ein Viereck, bei dem Flächen- und Kantenschwerpunkt zusammenfallen, auch ein Parallelogramm sein muss. Dies ist aber nicht der Fall, nicht einmal für konvexe Vierecke. Es gibt außer Parallelogrammen auch eine Schar von Drachen mit dieser Eigenschaft. Um diese zu beschreiben, wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem gewählt, derart dass die Ecken der Drachen folgende Koordinaten erhalten: $A(0,1)$, $B(-p,0)$, $C(0,-1)$, $D(q,0)$ mit $p > 0$. Für $q > 0$ hat man einen konvexen Drachen für $q < 0$ einen konkaven. Bei einem Drachen liegen alle Schwerpunkte auf der Symmetrieachse, also bei unserer Wahl auf der x-Achse. Wir zeigen:

- Für $0 < p < \sqrt{3}$ gibt es je einen positiven und einen negativen Wert für q, derart dass der damit gebildete Drachen die gewünschte Eigenschaft hat, also einen konvexen und einen konkaven Drachen dieser Art.

- Für $p = \sqrt{3}$ gibt es einen negativen Wert für q, derart dass der damit gebildete Drachen die gewünschte Eigenschaft hat, also einen konkaven Drachen dieser Art.

- Für $\sqrt{3} < p$ gibt es je zwei negativen Werte für q, derart dass der damit gebildete Drachen die gewünschte Eigenschaft hat, also zwei konkave Drachen dieser Art.

Für den Flächenschwerpunkt des Dreiecks BCD berechnet man

$$S_A\left(\frac{q-p}{3},\frac{1}{3}\right),$$

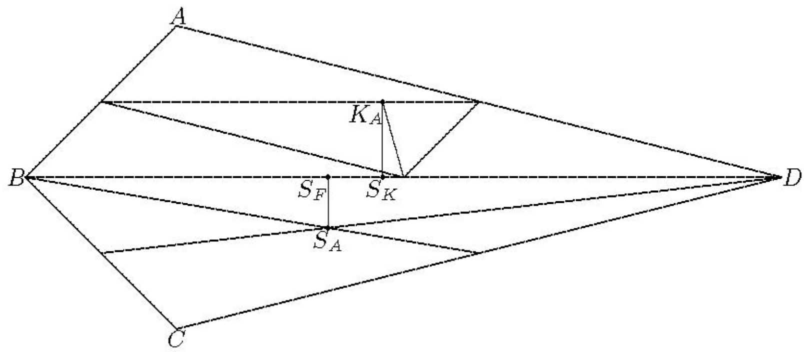
woraus sich der Flächenschwerpunkt des Drachens ergibt zu

$$S_{\mathcal{F}}\left(\frac{q-p}{3},0\right).$$

Die Koordinaten des Kantenschwerpunktes erhalten wir aus (3) unter Berücksichtigung von $a = b$, $c = d$:

$$S_{\mathcal{K}}\left(\frac{dq-ap}{2(a+d)},0\right).$$

Eine konstruktive Ermittlung des Kantenschwerpunkts und des Flächenschwerpunkts eines Drachens zeigt die folgende Figur



Die Bedingung für $S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{K}}$ lautet:

$$\frac{q-p}{3} = \frac{dq-ap}{2(a+d)},$$

also

$$2(a+d)(q-p) = 3(dq-ap).$$

Wegen $a = b = \sqrt{1+p^2}$, $c = d = \sqrt{1+q^2}$ handelt sich um eine Wurzelgleichung, die bei gegebenem p nach q aufzulösen ist. Dazu wird erst umgeformt zu

$$(2q+p)a = (q+2p)d.$$

Quadrieren ergibt

$$(2q+p)^2(1+p^2) = (q+2p)^2(1+q^2).$$

Das führt auf die polynomiale Gleichung für q:

$$q^4 + 4q^3p - 3q^2 + 3p^2 - 4qp^3 - p^4 = 0.$$

Sie hat offensichtlich die Wurzeln $\pm p$. Für $+p$ erhält man eine Raute, ein spezielles Parallelogramm, das nicht interessiert. Dagegen ist $-p$ keine Lösung der Wurzelgleichung. Wenn man diese beiden Wurzeln abspaltet, erhält man die quadratische Gleichung

$$q^2 + 4pq + p^2 - 3 = 0$$

mit den Wurzeln

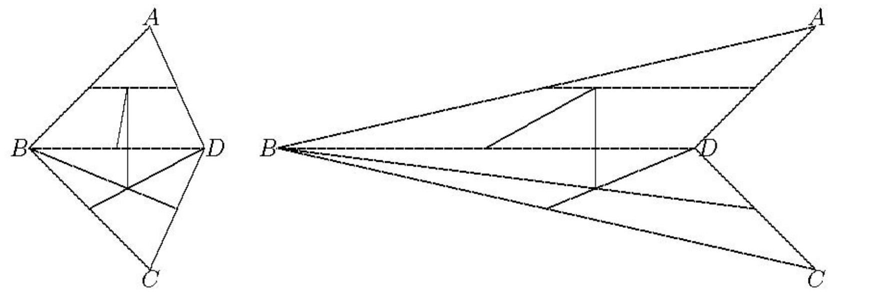
$$q_{1,2} = -2p \pm \sqrt{3(1+p^2)} = -2p \pm a\sqrt{3}.$$

Damit erhält man

$$d_{1,2} = 2a \mp p\sqrt{3}.$$

Beide Werte erfüllen die gegebene Wurzelgleichung. Wegen $q_2 < 0$ für alle $p > 0$ liefert dieser Wert immer einen konkaven Drachen. Für $p < \sqrt{3}$ ist $q_1 > 0$ und man erhält einen konvexen Drachen. Für $p = \sqrt{3}$ ist $q_1 = 0$; dann sind die Punkte A, C, D kollinear - man hat kein Viereck. Für $p > \sqrt{3}$ ist auch $q_1 < 0$, also hat man wieder einen konkaven Drachen.

Das folgende Bild zeigt die beiden Drachen mit $p = 1$, bei denen Kanten- und Flächenschwerpunkt übereinstimmen.

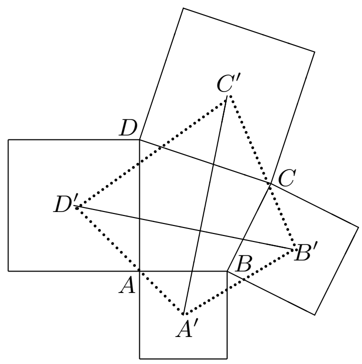


Ob es nichtüberschlagene Vierecke gibt, bei den Kanten- und Flächenschwerpunkt zusammenfallen, die aber weder ein Parallelogramm noch ein Drachen sind, ist eine offene Frage.

An dieser Stelle machen wir eine mehr methodische Anmerkung: Manchmal teilt man die Vierecke nach Symmetrieeigenschaft und hat Vierecke mit einer Punktsymmetrie, die Parallelogramme, Vierecke mit einer Diagonalsymmetrie, die Drachen, und Vierecke mit einer Lotsymmetrie, gleichschenklige Trapeze im konvexen Fall und die in Abschnitt 6 betrachteten überschlagenen Vierecke. Da fällt in unserem Zusammenhang eine gewisse Dualität zwischen den beiden Achsensymmetrien auf: Kantenschwerpunkt = Eckenschwerpunkt liefert außer Parallelogrammen gewisse lotsymmetrische Vierecke, Kantenschwerpunkt = Flächenschwerpunkt liefert außer Parallelogrammen gewisse diagonalsymmetrische Vierecke.

8 Der Eckenschwerpunkt und der Quadratesatz von van Aubel

Satz [van Aubel 1878]. *Errichtet man auf den Seiten* $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ *eines Vierecks* $ABCD$ *Quadrate mit den Mittelpunkten* A', B', C' *beziehungsweise* D', *derart dass die Winkel* $\angle A'AB$, $\angle B'BC$ $\angle C'CD$, $D'DA$ *gleichsinnig kongruent sind, so sind die Diagonalen* $[A'C']$ *und* $[B'C']$ *des Vierecks* $A'B'C'D'$ *gleich lang und stehen aufeinander senkrecht.*



Es gibt zwei Möglichkeiten die Quadrate aufzusetzen. Die genannten Winkel sind dann entweder alle gleich 45° oder alle gleich −45°.

Man findet in der Literatur und im Internet viele Beweise für diesen Satz (siehe zum Beispiel [3] oder [7]). Am Übersichtlichsten sind die Beweise, die mit komplexen Zahlen arbeiten. Ein solcher Beweis sei hier angegeben, weil daraus Folgerungen im Zusammenhang mit dem Eckenschwerpunkt gezogen werden sollen.

Es wird ein Viereck $ABCD$ in der komplexen Ebene betrachtet. Die Koordinaten der Ecken (komplexe Zahlen) seien a, b, c, d; diese Symbole bezeichnen also nicht mehr wie bisher die Seitenlängen des Vierecks. Es ist dann

$$a' = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)i$$

die Koordinate des Mittelpunktes A' des auf die Seite $[AB]$ aufgesetzten

Quadrates, für das gilt $\angle A'AB = 45°$. Für die Mittelpunkte der auf die weiteren Seiten aufgesetzten Quadrate, derart dass die betreffenden Winkel zu dem Winkel $\angle A'AB$ gleichsinnig kongruent sind, hat man entsprechend die Koordinaten

$$\begin{aligned} b' &= \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(b-c)i, \\ c' &= \frac{1}{2}(c+d) + \frac{1}{2}(c-d)i, \\ d' &= \frac{1}{2}(d+a) + \frac{1}{2}(d-a)i. \end{aligned}$$

Bei der anderen Möglichkeit, die Quadrate aufzusetzen, hat man i durch $-i$ zu ersetzen:

$$a' = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)i, \ldots$$

Wir betrachten nur den ersten Fall und berechnen

$$\begin{aligned} a' - c' &= \frac{1}{2}(a+b-c-d+(a-b-c+d)i), \\ b' - d' &= \frac{1}{2}(b+c-d-a+(b-c-d+a)i). \end{aligned}$$

Wir erkennen

$$(a'-c')i = b'-d',$$

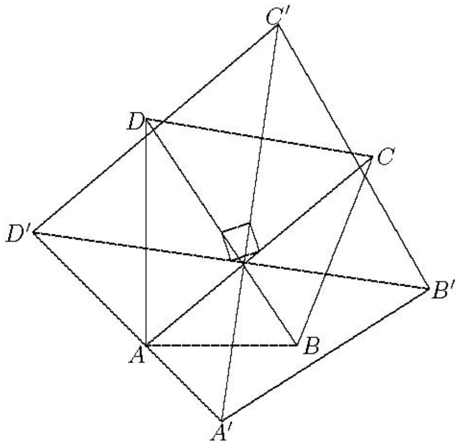
woraus die Behauptung folgt.

Dieser Beweis zeigt, das wir die Voraussetzungen an Vierecke, die wir in unsere Betrachtungen einbeziehen, abschwächen können. Wir brauchen nur ein Quadrupel von Punkten (A, B, C, D) - es kommt auf die Reihenfolge an, sie müssen aber nicht notwendig verschieden sein und es können drei auf einer Geraden liegen. Auszunehmen ist nur der Fall $A = C$ und $B = D$ - also auch $A = B = C = D$. In diesem Fall wäre nämlich auch $A' = C'$, $B' = D'$, das heißt, die fraglichen Diagonalen hätten beide die Länge 0 und dann ist die Aussage des Senkrechtstehens sinnlos.

Außerdem erlaubt der Beweis einen interessanten

Zusatz. *Mit den Bezeichnungen des voranstehenden Beweises gilt:*

a) Die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ besitzen den gleichen Eckenschwerpunkt.
b) Die Mittelpunkte der Diagonalen der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ bilden ein Quadrat mit dem gemeinsamen Eckenschwerpunkt als Mittelpunkt.
c) Dieses Quadrat fällt genau dann in einen Punkt zusammen, wenn das Viereck $A'B'C'D'$ ein Quadrat ist.
d) Der Fall c) tritt genau dann ein, wenn das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.



Zum Beweis sei wieder der Eckenschwerpunkt $S_{\mathcal{E}}$ als Ursprung mit der komplexen Koordinate 0 genommen.

a) Analog zu Gleichung (1) gilt dann

$$a + b + c + d = 0.$$

Daraus ergeben sich die folgenden Beziehungen.

$$a' + c' = (a + c)i, \quad b' + d' = (b + d)i,$$

woraus durch Addition folgt

$$a' + b' + c' + d' = 0.$$

Damit ist $S_{\mathcal{E}}$ auch der Eckenschwerpunkt des Vierecks $A'B'C'D'$.

b) Die Mittelpunkte E, F, E', F' der Diagonalen $[AC]$, $[CD]$, $[A'C']$, $[C'D']$ haben die komplexen Koordinaten

$$e = \frac{1}{2}(a + c), \quad f = \frac{1}{2}(b + d), \quad e' = \frac{1}{2}(a' + c'), \quad f' = \frac{1}{2}(b' + d').$$

Aus den Gleichungen unter a) folgt $e' = ei$, das heißt, die halben Diagonalen des Vierecks $EE'FF'$ sind gleich lang und stehen aufeinander senkrecht, das Viereck $EE'FF'$ ist ein Quadrat. Wegen $e + f = 0 = e' + f'$ hat der Mittelpunkt dieses Quadrates die Koordinate 0, es handelt sich also um den Eckenschwerpunkt $S_{\mathcal{E}}$ des Vierecks $ABCD$.

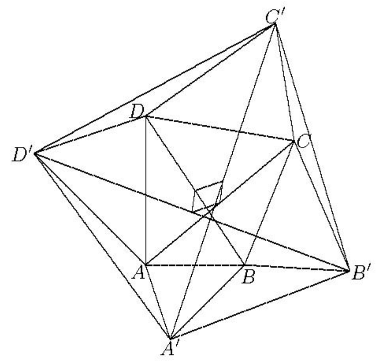
c) Aus dem Quadratesatz folgt weiter, dass das Viereck $A'B'C'D'$ genau dann ein Quadrat ist, wenn $E' = F'$ gilt. In diesem Fall degeneriert das Viereck $EE'FF'$ zu einem Punkt.

d) Damit gilt auch $E = F$, das heißt, das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Aussage d) ist im Wesentlichen der Spezialfall $n = 4$ des Satzes von Napoleon-Barlotti [8]. Die Richtung „$ABCD$ Parallelogramm $\Rightarrow$ $A'B'C'D'$ Quadrat" erscheint in der Literatur auch als Satz von Thébault [12].

Die Aussage b) lässt sich noch etwas verallgemeinern. Dazu sieht man den Quadratesatz unter einem etwas anderen Blickwinkel an. Man spricht nicht von aufgesetzten Quadraten, sondern von aufgesetzten gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecken mit den jeweiligen Seiten als Basis.

Satz. *Auf die Seiten eines Vierecks $ABCD$ seien gleichsinnig ähnliche Dreiecke $A'AB$, $B'BC$, $C'CD$ und $D'DA$ aufgesetzt. Dann gilt:*



a)Die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ besitzen den gleichen Eckenschwerpunkt.
b) Die Mittelpunkte der Diagonalen der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ bilden ein Parallelogramm mit dem gemeinsamen Eckenschwerpunkt als Mittelpunkt.
c) Ist der Punkt A' nicht der Mittelpunkt der Seite $[AB]$, so ist das Viereck $ABCD$ genau dann ein Parallelogramm, wenn das Viereck $A'B'C'D'$ ein Parallelogramm ist.

Die Situation ist durch das Viereck $ABCD$ und die Ecke A' bestimmt. Es wird wieder in der komplexen Ebene gerechnet. Da haben Ähnlichkeitsabbildungen die Form $z \mapsto uz+v$. Es wird zunächst die Abbildung gesucht, die das Dreieck $A'AB$ auf das Dreieck $B'BC$ abbildet. Dabei wird der Punkt A' als Ursprung genommen. Dann sind u und v bestimmt durch die Gleichungen

$$ua + v = b, \quad ub + v = c.$$

mit der Lösung

$$u = \frac{b-c}{a-b}, \quad v = \frac{ac - b^2}{a-b}.$$

Der Wert v ist das Bild des Ursprungs, also die komplexe Koordinate von B'. Entsprechend berechnet man die komplexen Koordinaten der Punkte

C' und D' und erhält

$$a' = 0,\ \ b' = \frac{ac - b^2}{a - b},\ \ c' = \frac{ad - bc}{a - b},\ \ d' = \frac{a^2 - bd}{a - b}.$$

a) Man berechnet

$$\frac{1}{4}(a' + b' + c' + d') = \frac{1}{4}(a + b + c + d),$$

das heißt, die Eckenschwerpunkte der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ fallen zusammen.

b) Man erinnere sich daran, dass der Eckenschwerpunkt eines Vierecks auch der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der beiden Diagonalen ist. Damit ist das Viereck aus den Mittelpunkten der Diagonalen zweier Vierecke mit gleichem Eckenschwerpunkt zentralsymmetrisch, also in jedem Fall – auch unabhängig von unserer speziellen Situation – ein Parallelogramm.

c) Der Punkt A' ist genau dann der Mittelpunkt der Seite $[AB]$, wenn $a + b = 0$ gilt. Dann sind auch die Punkte B', C' und D' die Mittelpunkte der entsprechenden Vierecksseiten und es gilt $c' = b' + d'$. Das bedeutet, dass diese Punkte ein Parallelogramm bilden; man hat den Satz von Varignon [13]. Jedoch lässt sich daraus nichts für die Gestalt des Vierecks $ABCD$ schließen. Deswegen wird im Folgenden $a + b \neq 0$ vorausgesetzt.

Für die Koordinaten e, f der Mittelpunkte E und F der Diagonalen $[AC]$ beziehungsweise$[BD]$, sowie die Koordinaten e', f' der Mittelpunkte E' und F' der Diagonalen $[A'C']$ beziehungsweise$[B'D']$ berechnen wir:

$$e = \frac{a + c}{2},\ \ f = \frac{b + d}{2},\ \ e' = \frac{ad - bc}{2(a - b)},\ \ f' = \frac{ac - b^2 + a^2 - bd}{2(a - b)}.$$

Aus diese Gleichungen folgt

$$(a - b)(f' - e') = (a + b)(e - f).$$

Daraus ergibt sich $f' = e' \Leftrightarrow e = f$. Da ein Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die Mittelpunkte der Diagonalen zusammenfallen, beweist das die Behauptung c).

Man kann sich nun noch dafür interessieren, wie weit hier das Parallelogramm $EE'FF'$ von einem Quadrat entfernt ist. Aufgrund der Gleichung

$$f' - e' = \frac{a+b}{a-b}(e-f)$$

wird diese Abweichung durch den Faktor $\frac{a+b}{a-b}$ beschrieben. Ein Quadrat liegt genau dann vor, wenn $\frac{a+b}{a-b} = \pm i$. Dieser Ausdruck wird in Polarkoordinaten dargestellt

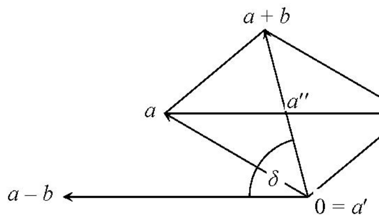
$$\frac{a+b}{a-b} = \rho(\cos\delta + i\sin\delta), |\delta| \leq \pi.$$

Für das Folgende beachte man, dass A' als Ursprung des komplexen Koordinatensystems gewählt ist. Dann ist $|a+b| = 2|A'A''|$, wobei A'' den Mittelpunkt der Seite $[AB]$ bezeichnet, und $|a-b| = |AB|$, die Länge der Seite $[AB]$. Also hat man

$$\rho = \frac{2|A'A''|}{|AB|};$$

nach dem Satz des Thales gilt $\rho = 1$ genau dann, wenn das Dreieck $A'AB$ an der Ecke A' einen rechten Winkel hat.

Der Winkel δ ist der Winkel, um den man die Zahl $a-b$ drehen muss, um sie in die Richtung der Zahl $a+b$ zu bringen; es ist der Winkel $\angle BA''A'$, positiv oder negativ je nachdem auf welcher Seite der Geraden AB der Punkt A' liegt.



Literatur

[1] H. H. van Aubel: *Note concernant les centres de carrés construits sur les côtés d'un polygon quelconque*. Nouvelle Correspondance Mathématique, **4** 1878, Seiten 40-44.
`http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN598948236_0004`

[2] R. Fritsch: *Zum Flächenschwerpunkt für Vierecke*. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, **65** 2012, Seiten 464-465.

[3] A. Jobbings: *Geometry by numbers*.
http://www.arbelos.co.uk/Papers/Geometry-numbers.pdf (29.05.2010)

[4] C. Kimberling: *Encyclopedia of Triangle Centers – ETC*.
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[5] J. Kratz: „Das Schwerpunktsviereck- Eine Ergänzung zum Beitrag von Karl Seebach über Vierecksschwerpunkte. Didaktik der Mathematik, **22** 1994, Seiten 316-317.

[6] H. Lenz: *Grundlagen der Elementarmathematik*. Hanser, München, 1976.

[7] Y. Nishiyama: *The beautiful geometric theorem of van Aubel*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, **66** 2011, Seiten 71-80.

[8] G. Pickert: *Drehungen und komplexe Zahlen beim Beweis des Satzes von Napoleon-Barlotti und seiner Umkehrung*. Didaktik der Mathematik, **23** 1995, Seiten 29-36.

[9] [G. Pickert][4]: *Zu: Zum Flächenschwerpunkt für Vierecke*. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, **66** 2013, Seiten 51-52.

[10] K. Seebach: *Über Schwerpunkte von Dreiecken, Vierecken und Tetraedern, Teil 1*. Didaktik der Mathematik, **11** 1983, Seiten 270-282.

[11] K. Seebach: *Nochmals: Vierecksschwerpunkte*. Didaktik der Mathematik, **22** 1994, Seiten 309-315.

[12] V. Thébault: *Problem 169*. National Mathematics Magazine, **12** 1937, Seite 55.

[13] P. de Varignon: *Elémens de mathématiques*. Pierre-Michel Brunet, Paris, 1731, Seite 62.

[14] H. Walser: *Schwerpunkt*. Mathematikinformation, **57** 2012, Seiten 14-22.

[4] Die eckigen Klammern um den Namen des Autors bedeuten, dass die zitierte Arbeit nur seine Ideen enthält, aber von jemand anderem aufgeschrieben wurde.