Höhere Elementargeometrie

I. Elementargeometrie in drei und höheren Dimensionen

1. Simplizes

Ein Simplex ist ein konvexer Körper in einem euklidischen Vektorraum.

Ein n-Simplex $\mathit{\Delta}^n$ betrachten wir im Vektorraum $\mathbb{R}^k$, $k \geq n$, versehen mit dem Standard-Skalarprodukt

$$AB = A \cdot B = \sum_{i=0}^{k} a_i b_i$$

für $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ und $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

In der Bezeichnung wird nicht zwischen Punkten und Vektoren unterschieden.

Ein *n-Simplex* $\mathit{\Delta}^n = \mathit{\Delta} = [A_0, A_1, \ldots, A_n]$ ist die konvexe Hülle von $n + 1$ affin unabhängigen Punkten $A_0, A_1, \ldots, A_n$:

$$\mathit{\Delta} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i A_i \mid t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \wedge \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\},$$

die Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sind die Ecken des Simplexes $\mathit{\Delta}$.

Erinnerung.

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ *affin unabhängig* $\Leftrightarrow$ $A_1 - A_0, A_2 - A_0, \ldots, A_n - A_0$ *linear unabhängig*

Falls $k = n$ und die A_j als Spaltenvektoren aufgefasst werden, besagt diese Bedingung

$$\det(A_1 - A_0, A_2 - A_0, \ldots, A_n - A_0) = \det(A_j - A_0) \neq 0;$$

durch *Rändern* erhält man diese Bedingung in einer eleganteren Form

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_0 & A_j - A_0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ A_0 & A_j \end{pmatrix} \neq 0.$$

Im Fall $k > n$ darf die Gramsche Determinante nicht verschwinden,

$$\det\,((A_i - A_0)\cdot(A_j - A_0)) \neq 0.$$

Die Eigenschaft der affinen Unabhängigkeit bleibt unter Affinitäten erhalten. Um das einzusehen, betrachten wir eine Affinität $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $X \mapsto \Phi X + C$, wobei Φ eine invertierbare $k \times k$-Matrix bezeichnet und C einen (Verschiebungs-)Vektor. Damit berechnen wir

$$\varphi(A_i) - \varphi(A_0) = \Phi A_i - \Phi A_0 = \Phi(A_i - A_0).$$

Da die Matrix Φ invertierbar ist, sind die Vektoren $\varphi(A_i) - \varphi(A_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, genau dann linear unabhängig, wenn dies für die Vektoren $A_i - A_0$ gilt.

Spezielle Affinitäten sind die zentrischen Streckungen. Die Abbildungsvorschrift einer zentrischen Streckung mit Zentrum Z und Faktor $\lambda \neq 0$ lautet

$$X \mapsto Z + \lambda(X - Z) = \lambda X + (1 - \lambda)Z;$$

also ist sie eine Affinität mit der Matrix $\Phi = \lambda E_k$ (E_k bezeichnet die k-dimensionale Einheitsmatrix) und dem Verschiebungsvektor $(1 - \lambda)Z$.

Definitionen. Es sei $\Delta = [A_0, A_1, \dots, A_n]$ ein n-Simplex.

1. Die konvexe Hülle jeder Teilmenge von Ecken ist eine *Facette* von Δ, die konvexe Hülle der übrigen Ecken ist die *Gegenfacette* oder *Gegenseite*.
2. Eine *d-Facette* von Δ ist eine Facette mit $d + 1$ Ecken.

Eine Facette ist demnach selbst ein Simplex. Die Gegenfacette zu einer d-Facette ist eine (n-d-1)-Facette. Zu einem n-Simplex gehören $\binom{\boldsymbol{n}+1}{\boldsymbol{d}+1}$ d-Facetten.

Sprechweisen. *Seiten* für Facetten, insbesondere *Seitendreieck* für 2-Facette; jedoch Kante für 1-Facette.

Volumen eines n-Simplexes $\Delta = [A_0, A_1, \dots, A_n]$ im $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}(\Delta) = \frac{1}{\boldsymbol{n}!} |\det(A_j - A_0)|$$

Volumen als Funktion der Kantenlängen $\boldsymbol{a_{ij}} = \sqrt{(\boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A_j})^2}$, $i \leq j$:

$(\mathrm{n}!)^2\, \mathrm{V}^2 = (\det(A_j - A_0))^2 = \det(A_i - A_0)^t \cdot \det(A_j - A_0) = \det((A_i - A_0)\cdot(A_j - A_0)) =$

Nebenrechnung: $a_{ij}{}^2 = (A_i - A_j)^2 = ((A_i - A_0) - (A_j - A_0))^2 =$

$$= (A_i - A_0)^2 - 2\,(A_i - A_0)\cdot(A_j - A_0) + (A_j - A_0)^2 = a_{0i}{}^2 - 2\,(A_i - A_0)\cdot(A_j - A_0) + a_{0j}{}^2$$

$= \det(\frac{1}{2}(a_{0i}{}^2 + a_{0j}{}^2 - a_{ij}{}^2)) = \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}} \det(a_{0i}{}^2 + a_{0j}{}^2 - a_{ij}{}^2) =$ (Rändern)

$$= \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{a}_{0i}^2 & \boldsymbol{a}_{0i}^2 + \boldsymbol{a}_{0j}^2 - \boldsymbol{a}_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}} \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \boldsymbol{a}_{0i}^2 & \boldsymbol{a}_{0j}^2 - \boldsymbol{a}_{ij}^2 \end{pmatrix} = \text{(Rändern)}$$

$$= \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}}\ \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{a}_{0j}^2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boldsymbol{a}_{0i}^2 & \boldsymbol{a}_{0j}^2 - \boldsymbol{a}_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}}\ \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{a}_{0j}^2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & \boldsymbol{a}_{0i}^2 & -\boldsymbol{a}_{ij}^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}}\ \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \boldsymbol{a}_{0j}^2 \\ -1 & \boldsymbol{a}_{0i}^2 & -\boldsymbol{a}_{ij}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}\ \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}}\ \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & {}'-\boldsymbol{a}_{0j}^2 \\ -1 & \boldsymbol{a}_{0i}^2 & \boldsymbol{a}_{ij}^2 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}\ \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}}\ \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & {}'\boldsymbol{a}_{0j}^2 \\ 1 & \boldsymbol{a}_{0i}^2 & \boldsymbol{a}_{ij}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}\ \frac{1}{2^{\boldsymbol{n}}}\ \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a}_{ij}^2 \end{pmatrix}.$$

Spezialfälle.

$$n = 2\text{: } V^2 = -\frac{1}{16}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \boldsymbol{a}_{01}^2 & \boldsymbol{a}_{02}^2 \\ 1 & \boldsymbol{a}_{01}^2 & 0 & \boldsymbol{a}_{12}^2 \\ 1 & \boldsymbol{a}_{02}^2 & \boldsymbol{a}_{12}^2 & 0 \end{pmatrix} = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

mit $a = a_{12}$, $b = a_{02}$, $c = a_{01}$, $\boldsymbol{s} = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}$ (Heronsche Formel).

$$n = 1\text{: } V^2 = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \boldsymbol{a}_{01}^2 \\ 1 & \boldsymbol{a}_{01}^2 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_{01}^2$$

$$n = 0\text{: } V^2 = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Problem. Aus der bekannten Gleichung $\begin{pmatrix} \boldsymbol{n}+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}+1 \\ \boldsymbol{n}-1 \end{pmatrix}$ folgt, dass ein n-Simplex genau so viele (n-2)-Facetten wie Kanten hat. Da sich das Volumen eines n-Simplexes als Funktion der Kantenlängen darstellen lässt, kann man fragen, ob es sich auch als Funktion der Volumina der (n-2)-Facetten darstellen lässt. Speziell im Fall $n = 4$ hat man 10 Kanten und 10 Seitendreiecke. Das ist ein offenes Problem.

Satz. *Ein Simplex ist durch seine Kantenlängen bis auf (gleichsinnige oder ungleichsinnige) Isometrie bestimmt.*

Beweis. Es seien $[A_0, A_1, \ldots, A_n]$ und $[B_0, B_1, \ldots, B_n]$ zwei n-Simplizes mit übereinstimmenden Kantenlängen $a_{ij} = b_{ij}$. Da Verschiebungen Isometrien sind, kann o.B.d.A. $A_0 =$

$B_0 = 0$ angenommen werden. Dann sind $A_1, \ldots, A_n$ sowie $B_1, \ldots, B_n$ linear unabhängig und es kann zusätzlich angenommen werden, dass es sich um Basen handelt. Es genügt dann zu zeigen, dass die durch $A_j \mapsto B_j$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, definierte lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie ist. Wir betrachten zwei Punkte $\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{t}_j \boldsymbol{A}_j$ und $\boldsymbol{Q} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{s}_j \boldsymbol{A}_j$; deren Abstand berechnen wir zu

$$\mathrm{d}(P,Q) = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{t}_j - \boldsymbol{s}_j)\boldsymbol{A}_j\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{t}_j - \boldsymbol{s}_j)^2 \boldsymbol{A}_j^{\,2} + 2 \sum_{0 \le i < j \le n} (\boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{s}_k)(\boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{s}_j)\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{t}_j - \boldsymbol{s}_j)^2 \boldsymbol{a}_{0j}^{\;2} + \sum_{0 \le i < j \le n} (\boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{s}_k)(\boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{s}_j)(\boldsymbol{a}_{0i}^2 + \boldsymbol{a}_{0j}^2 - \boldsymbol{a}_{ij}^2)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{t}_j - \boldsymbol{s}_j)^2 \boldsymbol{b}_{0j}^{\;2} + \sum_{0 \le i < j \le n} (\boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{s}_k)(\boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{s}_j)(\boldsymbol{b}_{0i}^2 + \boldsymbol{b}_{0j}^2 - \boldsymbol{b}_{ij}^2)} = \mathrm{d}(\varphi(P),\varphi(Q));$$

womit alles bewiesen ist. *qed*

Die Dreiecksungleichung besagt, dass die Seitenlängen eines Dreiecks nicht beliebig gewählt werden können. Die größte unter ihnen muss kleiner sein als die Summe der beiden übrigen. Diese Aussage hat ein n-dimensionales Analogon.

Satz. *Genau dann sind* $\binom{\boldsymbol{n}+1}{2}$ *positive reelle Zahlen* $a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{n\text{-}1n}$ *Kantenlängen eines n-Simplexes* $\Delta = [A_0, A_1, \ldots, A_n]$, *wenn die Matrix* $(a_{0i}^{\;2} + a_{0j}^{\;2} - a_{ij}^{\;2})$ *positiv definit ist.*

Betrachten wir den Fall $n = 2$. Es geht um die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2\boldsymbol{a}_{01}^2 & \boldsymbol{a}_{01}^2 + \boldsymbol{a}_{02}^2 - \boldsymbol{a}_{12}^2 \\ \boldsymbol{a}_{01}^2 + \boldsymbol{a}_{02}^2 - \boldsymbol{a}_{12}^2 & 2\boldsymbol{a}_{02}^2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist offensichtlich genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante $4a_{01}^{\;2}a_{02}^{\;2} - (a_{01}^{\;2} + a_{02}^{\;2} - a_{12}^{\;2})^2 =$

$= (2a_{01}a_{02} + a_{01}^{\;2} + a_{02}^{\;2} - a_{12}^{\;2})(\, 2a_{01}a_{02} - a_{01}^{\;2} - a_{02}^{\;2} + a_{12}^{\;2}) =$

$= ((a_{01} + a_{02})^2 - a_{12}^{\;2})(\, a_{12}^{\;2} - (a_{01} - a_{02})^2) =$

$= (a_{01} + a_{02} + a_{12})(a_{01} + a_{02} - a_{12})(a_{12} + a_{01} - a_{02})(a_{12} - a_{01} + a_{02})$

positiv ist. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $0 < a_{12} \leq a_{02} \leq a_{01}$ gilt. Dann sind die ersten drei Faktoren dieser Faktorzerlegung positiv, also ist das Produkt genau dann positiv, wenn $a_{12} - a_{01} + a_{02} > 0$, das heißt, $a_{01} < a_{12} + a_{02}$, die größte Seite kleiner als die Summe der beiden anderen ist.

Beweis des Satzes. Wir verwenden das Sylverstersche Hauptminorenkriterium, das manchmal auch Adolf Hurwitz zugeschrieben wird. Danach ist eine quadratische Matrix genau dann positiv definit, wenn alle ihre Hauptminoren positiv sind. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung klar: Der k-te Hauptminor der Matrix $(a_{0i}^2 + a_{0j}^2 - a_{ij}^2)$ ist gleich $2^k \cdot k! \cdot V_k^2 > 0$, wobei V_k das Volumen der k-Facette $[A_0, A_1, \ldots, A_k]$ bezeichnet.

Zum Nachweis der Umkehrung ist ein Simplex mit den vorgegebenen Kantenlängen zu konstruieren. Die Hauptminoren der Matrix $\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_{0i}^2 + \boldsymbol{a}_{0j}^2 - \boldsymbol{a}_{ij}^2)\right)$ unterscheiden sich von den Hauptminoren der Matrix $(a_{0i}^2 + a_{0j}^2 - a_{ij}^2)$ nur durch eine Potenz von 2, sind also nach Voraussetzung auch alle positiv. Damit ist auch die Matrix $\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_{0i}^2 + \boldsymbol{a}_{0j}^2 - \boldsymbol{a}_{ij}^2)\right)$ positiv definit und definiert ein inneres Produkt <,> auf $\mathbb{R}^n$. Mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren bestimmen wir ausgehend von der kanonischen Basis $E_1, E_2, \ldots, E_n$ eine Orthonormalbasis $E'_1, E'_2, \ldots, E'_n$. Dann stellen wir die Vektoren E_j als Linearkombination der Basis E'_i dar: $\boldsymbol{E}_j = \sum_{i=1}^{j} \boldsymbol{t}_{ij} \boldsymbol{E}'_i$. Wir nehmen im $\mathbb{R}^n$ – versehen mit dem Standard-Skalarprodukt – das Simplex $\Delta = [A_0, A_1, \ldots, A_n] = [0,(t_{11},0,\ldots,0),(t_{12}, t_{22},0,\ldots,0),\ldots,(t_{1n}, t_{2n},\ldots, t_{nn})]$. Nach Konstruktion gilt:

$$A_i \cdot A_j = \langle E_i, E_j \rangle = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_{0i}^2 + \boldsymbol{a}_{0j}^2 - \boldsymbol{a}_{ij}^2)$$

für $1 \leq i \leq j \leq n$. Damit hat das Simplex Δ die gewünschten Kantenlängen:

1. $d(A_0,A_j) = \sqrt{\langle \boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{A}_j \rangle} = \boldsymbol{a}_{0j}$,
2. $d(A_i,A_j) = \sqrt{(\boldsymbol{A}_j - \boldsymbol{A}_i)^2} = \sqrt{\boldsymbol{A}_j^2 - 2\boldsymbol{A}_j \cdot \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^2} = \boldsymbol{a}_{ij}.\, qed$

Für einen Punkt $P = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{t}_i \boldsymbol{A}_i$ mit $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ in dem von den Punkten A_0, A_1, …, A_n aufgespannten affinen Unterraum sind die Koeffizienten t_i die *normalisierten baryzentrischen Koordinaten* (*in Bezug auf das Simplex* Δ); bringt man – physikalisch betrachtet – an den Ecken A_i die Massen t_i an, so ist P der Schwerpunkt des Systems von Massenpunkten. Der Schwerpunkt ändert sich nicht, wenn man die Massen um ein gemeinsames Vielfaches verändert; für jedes $s \neq 0$ besteht das $(n+1)$-Tupel $(st_0,st_1,\ldots,st_n)$ aus den *allgemeinen (nicht normalisierten) baryzentrischen Koordinaten* von P. Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes sind also nur bis auf ein gemeinsames Vielfaches bestimmt; es kommt nur auf ihr Verhältnis an. Dass die beiden $(n+1)$-Tupel $(t_0,t_1,\ldots,t_n)$ und $(s_0,s_1,\ldots,s_n)$ baryzentrische Koordinaten desselben Punktes sind, symbolisiert man dabei oft in der folgenden Form:

$$t_0 : t_1 : \ldots : t_n = s_0 : s_1 : \ldots : s_n.$$

Bei Punkten des Simplexes Δ sind die baryzentrischen Koordinaten entweder alle nicht negativ oder alle nicht positiv, je nach Wahl des Faktors s beim Übergang von den normalisierten zu den allgemeinen Koordinaten; sie können jedoch nicht alle verschwinden. Hebt man die Einschränkung „alle nicht negativ oder alle nicht positiv“ auf, so erhält man die baryzentrischen Koordinaten der Punkte des von den Ecken A_0, A_1, …, A_n aufgespannten affinen Unterraums, jedenfalls solange die Summe der Koordinaten von Null verschieden ist; denn dann kann man die Koordinaten *normalisieren*, in dem man sie durch die Summe dividiert. Das lässt sich folgendermaßen einsehen. Die Punkte in dem genannten affinen Unterraum sind die Punkte, die sich (eindeutig) in der Form

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}_0 + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{t}_i(\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{A}_0)$$

darstellen lassen. Setzt man nun $\boldsymbol{t}_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{t}_i$, so erhält man $\boldsymbol{P} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{t}_i \boldsymbol{A}_i$ mit $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{t}_i = 1$; also besteht das $(n+1)$-Tupel $(t_0,t_1,\ldots,t_n)$ aus den normalisierten baryzentrischen Koordinaten von P. Von einem beliebigen $(n+1)$-Tupel $(s_0,s_1,\ldots,s_n)$ mit $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{s}_i \neq 0$ ausgehend erhält man durch die Festsetzung

$$\boldsymbol{t}_i = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{s}_i}$$

die normalisierten baryzentrischen Koordinaten eines eindeutig bestimmten Punktes P; das $(n+1)$-Tupel $(s_0,s_1,\ldots,s_n)$ ist ein System allgemeiner, nicht normalisierter Koordinaten von P.

Ein $(n+1)$-Tupel $(s_0,s_1,\ldots,s_n)$ mit $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{s}_i = 0$ beschreibt einen *uneigentlichen Punkt* oder *Fernpunkt* des genannten affinen Unterraumes, solange nicht alle s_i verschwinden. Durch Hinzunahme der Fernpunkte erhält man einen *projektiven Raum*, die *projektive Hülle* des affinen Unterraumes, in der die Menge der Fernpunkte als *uneigentliche Hyperebene* – im Fall $n=2$ auch als *Ferngerade* – bezeichnet wird. Nur dem $(n+1)$-Tupel $(0,0,\ldots,0)$ ist kein Punkt zugeordnet. Die uneigentliche Hyperebene wird demnach durch die homogene lineare Gleichung

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0$$

beschrieben; für die Ferngerade der *projektiven Ebene* nimmt auch die Gleichung

$$x + y + z = 0.$$

Wir wollen nun überlegen, dass die homogenen Koordinaten der Punkte einer beliebigen Hyperebene auch durch eine homogene lineare Gleichung beschrieben werden können. Dazu gehen wir von der Hesseschen Normalform einer Hyperebenengleichung aus:

$$N \cdot X = \mathrm{d} \geq 0,$$

wobei N einen der beiden zu der Hyperebene senkrechten Einheitsvektoren bezeichnet und d den Abstand der Hyperebene von einem beliebig zu wählenden Ursprung; wenn die Hyperebene den Ursprung nicht enthält, also $d > 0$ gilt, ist der Vektor N so festgelegt, dass er vom Ursprung zu der Hyperebene weist. Nun wählen wir den Ursprung in der Hyperebene und stellen einen Punkt X mit Hilfe seiner normalisierten baryzentrischen Koordinaten dar

$$X = \sum_{j=0}^{n} x_j A_j, \quad \sum_{j=0}^{n} x_j = 1.$$

Durch Einsetzen in die Hessesche Normalform erhalten wir

$$N\cdot\sum_{j=0}^{n}x_jA_j=0.$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu der homogenen linearen Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n}NA_jx_j=0.$$

Die Koeffizienten $d_j = NA_j$ sind die (orientierten) Abstände der Ecken des Simplexes von der Hyperebene. Sie bilden die *normalisierten Koordinaten der Hyperebene* und sind bis auf ein gemeinsames Vorzeichen eindeutig bestimmt. Zwei dieser Koeffizienten haben genau dann das gleiche Vorzeichen, wenn die zugehörigen Ecken auf der gleichen Seite des Simplexes liegen. Aufgrund der Homogenität der Gleichung ist klar, dass sich die Lösungsmenge nicht ändert, wenn man zu nicht normalisierten Koordinaten übergeht. Damit ist die allgemeine Form der Hyperebenengleichung in baryzentrischen Koordinaten:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n = 0.$$

Die baryzentrischen Koordinaten haben noch eine andere geometrische Interpretation. Durch den Punkt P (im Innern oder auf dem Rand des Simplexes, alle normalisierten baryzentrischen Koordinaten nicht negativ) wird das Simplex Δ in n +1 Simplizes Δ_i = $[A_0,\ldots, A_{i-1},P, A_{i+1},\ldots,A_n]$ zerlegt. Es gilt

$$n!\mathrm{V}(\Delta_0) = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{A}_i\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{t}_i & 1\\ \sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{A}_i\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_0 & 1\\ \boldsymbol{t}_0\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_i\end{pmatrix}\right| = t_0\cdot n!\ \mathrm{V}(\Delta),$$

also gilt $\mathrm{V}_0 = \mathrm{V}(\Delta_0) = t_0\cdot \mathrm{V}(\Delta)$ und analog $\mathrm{V}_i = \mathrm{V}(\Delta_i) = t_i\cdot \mathrm{V}(\Delta)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, das heißt

$$t_0 : t_1 : \ldots : t_n = \mathrm{V}_0 : \mathrm{V}_1 : \ldots : \mathrm{V}_n.$$

Für Punkte P im Äußeren des Simplexes (mindestens eine normalisierte baryzentrische Koordinaten negativ) hat man orientierte Volumina zu betrachten. Das Volumen V_i ist negativ, wenn die Punkte P und A_i nicht in der gleichen Seite des von den übrigen Ecken aufgespannten affinen Unterraumes liegen.

Die Betrachtung der Volumina erlaubt es für einige interessante Punkte die baryzentrischen Koordinaten leicht zu ermitteln. Durch den *Schwerpunkt* wird ein Dreieck in drei flächengleiche Dreiecke zerlegt, also hat er die baryzentrischen Koordinaten (1,1,1). Durch den *Inkreismittelpunkt* wird das Dreieck in drei Dreiecke zerlegt, die den Inkreisradius als gemeinsame Höhe haben mit den Seiten a, b, c als zugehörigen Basen; also verhalten sich die Flächen wie die Basen, der Inkreismittelpunkt hat die baryzentrischen Koordinaten (a,b,c).

In der ebenen Geometrie, Geometrie des ebenen Dreiecks, verwendet man statt der baryzentrischen Koordinaten häufig auch die so genannten trilinearen Koordinaten. Die *normalisierten trilinearen Koordinaten* eines Punktes P in der Ebene eines Dreiecks Δ (in Bezug auf dieses Dreieck) sind die orientierten Abstände des Punktes P von den Seiten des Dreiecks Δ, also die Höhen der Dreiecke, durch die die baryzentrischen Koordinaten bestimmt sind. Die *(allgemeinen)* *trilinearen Koordinaten* ergeben sich wieder durch Multiplikation mit einem gemeinsamen Faktor. Demgemäß besteht zwischen den trilinearen Koordinaten (x', y', z') und den baryzentrischen Koordinaten (x,y,z) eines Punktes der folgende Zusammenhang:

$$x = ax', \; y = by', \; z = cz'.$$

Damit ergeben sich als die trilinearen Koordinaten des Schwerpunkts zu $\left(\frac{1}{\boldsymbol{a}}, \frac{1}{\boldsymbol{b}}, \frac{1}{\boldsymbol{c}}\right)$ und die des Inkreismittelpunktes zu (1,1,1); außerdem erhält die Ferngerade die Gleichung $ax' + by' + cy' = 0$. Das Normalisieren der trilinearen Koordinaten ist etwas schwieriger als bei den baryzentrischen Koordinaten. Es geht darum, zu den allgemeinen trilinearen Koordinaten (x', y', z') eines nicht auf der Ferngerade liegenden Punktes P einen Faktor k so zu bestimmen, dass das Tripel (kx', ky', kz') aus den normalisierten trilinearen Koordinaten des Punktes P besteht. Dabei ist kx' die *orientierte* Höhe des Dreiecks $[P,B,C]$ durch die Ecke, genau dann positiv, wenn P auf derselben Seite der Geraden BC liegt wie die Ecke A. Die Interpretation der baryzentrischen Koordinaten als Flächenverhältnisse liefert für das Dreieck $[P,B,C]$ die orientierte Fläche

$$\frac{\boldsymbol{ax'}}{\boldsymbol{ax'}+\boldsymbol{by'}+\boldsymbol{cz'}}\mathbf{F},$$

wobei F die Fläche des Dreiecks $[A,B,C]$ bezeichnet. Die elementare Formel für die Fläche eines Dreiecks führt dann auf die Gleichung

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{kx}'=\frac{\boldsymbol{ax}'}{\boldsymbol{ax}'+\boldsymbol{by}'+\boldsymbol{cz}'}\mathbf{F},$$

woraus wir den gesuchten Faktor

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\mathbf{F}}{\boldsymbol{ax}'+\boldsymbol{by}'+\boldsymbol{cz}'}$$

erhalten.

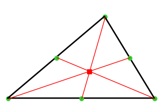
Im Folgenden sollen nun einige bekannte Tatsachen aus der Dreiecksgeometrie auf ihre Übertragbarkeit auf Tetraeder und allgemein auf *n*-Simplizes untersucht werden. Dazu noch eine grundsätzliche Bemerkung:

- Was ist das Analogon der merkwürdigen Linien des Dreiecks?
- Linien haben in der Ebene Dimension 1 und Kodimension 1.
- Im Raum haben
  - Linien die Dimension 1,
  - Flächen die Kodimension 1!

Dabei ist die *Kodimension* eines geometrischen Objekts definiert als die Dimension des Gesamtraumes minus die Dimension des Objekts.

2. Schwerpunkte

Als erstes versuchen wir den Begriff des Schwerpunktes eines ebenen Dreiecks in höhere Dimensionen zu übertragen. Dabei behandeln wir den Übergang zur Dimension 3, zum Tetraeder zunächst synthetisch, danach den allgemeinen Fall vektoriell.



Wir erinnern an die ebene Situation:

Satz. *Die Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt,* dem ***Schwerpunkt*** des Dreiecks.

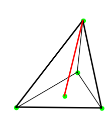
Eine ***Schwerlinie*** verbindet eine Ecke mit dem Mittelpunkt der Gegenseite.

Alternativ:

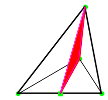
Eine ***Schwerlinie*** verbindet den Mittelpunkt einer Seite mit der Gegenecke.

Im dreidimensionalen Raum:

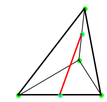
Eine ***Schwerlinie*** verbindet eine Ecke mit dem Schwerpunkt der Gegenseite.



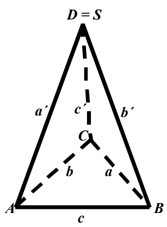
Ein ***Schwerdreieck*** verbindet den Mittelpunkt einer Kante mit der Gegenkante.



Eine ***Schwerlinie 2. Art*** verbindet die Mittelpunkte eines Paares von Gegenkanten.



Satz. *Die 4 Schwerlinien, die 6 Schwerebenen und die 3 Schwerlinien 2. Art schneiden sich im* ***Schwerpunkt*** *des Tetraeders. Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien im Verhältnis* 3 : 1 *und ist der Mittelpunkt der Schwerlinien 2. Art.*



Vor dem Beweis führen wir einige Bezeichnungen ein, die für die Geometrie des Tetraeders bequem sind.

Ecken A, B, C, D (= S Spitze)

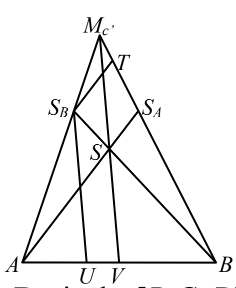
Seiten des Dreiecks [A,B,C] nach Euler: a, b, c

jeweilige Gegenkante a', b', c'

Für Überlegungen dieser Art im Rahmen der synthetischen Geometrie ist häufig hilfreich der folgende

Hilfssatz. Vier Geraden im Raum, die sich paarweise schneiden, sind entweder kopunktal oder sie liegen in einer Ebene.

(Es seien g, h, k, l vier solche Geraden, und es sei angenommen, dass sie nicht kopunktal sind. Die Geraden g und h erzeugen eine Ebene E, o.B.d.A. enthalte k nicht den Schnittpunkt von g und h. Dann hat k mit der Ebene E die Schnittpunkte mit g und h gemeinsam, liegt also auch in E. Da die Geraden g, h und k nicht kopunktal sind, können die Schnittpunkte von l mit den Geraden g, h und k nicht in einen Punkt zusammenfallen. Also hat auch die Gerade l zwei Punkte mit der Ebene E gemeinsam und ist folglich auch in E enthalten.)



Beweis des Satzes. Es sei $M_{c'}$ der Mittelpunkt der Kante [C,D]. Wir betrachten das Schwerdreieck [A,B, $M_{c'}$]. Die Strecke [A, $M_{c'}$] ist Seitenhalbierende des Dreiecks [A,C,D] (Gegenseite zur Ecke B) und wird durch den Schwerpunkt S_B dieses Dreiecks im Verhältnis 2 : 1 geteilt. Ebenso wird die Strecke [B, $M_{c'}$] durch den Schwerpunkt S_A des Dreiecks [B,C, D] (Gegenseite zur Ecke A) im Verhältnis 2 : 1 geteilt. Die Strecken [B,S_B] und [A,S_A] sind zwei Schwerlinien des Tetraeders, die ganz in dem Dreieck [A,B, $M_{c'}$] liegen und sich deshalb in einem Punkt S schneiden. Analog ergibt sich, dass sich jedes andere Paar von Schwerlinien schneidet. Da die vier Schwerlinien die vier Ecken des Tetraeders enthalten, können sie nicht in einer Ebene liegen, sind also nach dem

Hilfssatz kopunktal. Damit ist der Punkt S der Schnittpunkt der Schwerlinien und er liegt auch in allen sechs Schwerdreiecken. Weiter bezeichne V den Schnittpunkt der Geraden AB und $M_{c'}S$. Der Satz von al Mut'aman (und Ceva) liefert

$$1 = \frac{\overline{AV}}{\overline{VB}} \cdot \frac{\overline{BS_A}}{\overline{S_A M_{c'}}} \cdot \frac{\overline{M_{c'} S_B}}{\overline{S_B A}} = \frac{\overline{AV}}{\overline{VB}} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\overline{AV}}{\overline{VB}},$$

das bedeutet, der Punkt V ist der Mittelpunkt M_c der Kante $[A,B]$ und damit gehört der Punkt S auch zu der Strecke $[M_{c'}, M_c]$, einer Schwerlinie 2. Art. Ebenso liegt S auf allen anderen Schwerlinien 2. Art.

Es bleiben die behaupteten Verhältnisse zu zeigen. Dazu bezeichne zunächst T den Schnittpunkt der Parallelen zur Schwerlinie $[A,S_A]$ durch den Punkt S_B mit der Strecke $[B, M_{c'}]$. Aus dem Vierstreckensatz (Strahlensatz) folgt zunächst

$$\overline{S_A T} : \overline{TM_{c'}} = \overline{AS_B} : \overline{S_B M_{c'}} = 2:1,$$

also $\overline{S_A T} = 2 \cdot \overline{TM_{c'}}$. Außerdem haben wir $\overline{BS_A} = 2 \cdot \overline{S_A M_{c'}} = 2 \cdot (\overline{S_A T} + \overline{TM_{c'}})$. Durch Elimination von $\overline{S_A T}$ aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir $\overline{BS_A} = 6 \cdot \overline{TM_{c'}}$; mit Hilfe der ersten Gleichung ergibt sich daraus noch $\overline{BS_A} = 3 \cdot \overline{S_A T}$. Schließlich liefert der Vierstreckensatz noch

$$\overline{BS} : \overline{SS_B} = \overline{BS_A} : \overline{S_A T} = 3:1,$$

wie behauptet.

Nun sei noch U der Schnittpunkt der Parallelen zur Schwerlinie 2. Art $[M_{c'},V]$ durch den Punkt S_B mit der Strecke $[A,B]$. Der Vierstreckensatz liefert:

$$\overline{SV} : \overline{S_B U} = \overline{BS} : \overline{BS_B} = 3:4, \; \overline{S_B U} : \overline{M_{c'} V} = \overline{S_B A} : \overline{M_{c'} A} = 2:3.$$

Die Multiplikation der beiden Gleichungen ergibt

$$\overline{SV} : \overline{M_{c'} V} = 2:4 = 1:2,$$

also ist S der Mittelpunkt der Strecke $[M_{c'},V] = [M_{c'}, M_c]$, einer Schwerlinie 2. Art, wie behauptet. *qed*

Nun wenden wir uns dem n-dimensionalen Fall zu. Physikalisch erhält man den Schwerpunkt S eines Systems von $n+1$ mit gleichen Massen belegten Massenpunkten A_0, $A_1, \ldots, A_n$ durch

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\boldsymbol{n}+1}\sum_{j=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_j.$$

Wir nehmen diese Gleichung als Definition für den Schwerpunkt eines n-Simplexes. Sie lässt sich auch in der Form

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\boldsymbol{n}+1}\boldsymbol{A}_0 + \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}+1}\left(\frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{j=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_j\right)$$

schreiben, was bedeutet, dass der Punkt S auf der Strecke liegt, die die Ecke A_0 mit dem Schwerpunkt der Gegenseite verbindet, und dass er diese Strecke im Verhältnis $n : 1$ teilt. Allgemein definieren wir die *Schwerlinien* eines n-Simplexes als die Strecken, die den Schwerpunkt einer Seite mit dem Schwerpunkt der Gegenseite verbinden. Es gilt der

Satz. *Der Schwerpunkt eines n-Simplexes gehört zu jeder Schwerlinie und teilt diese im Verhältnis der Anzahl der Ecken der beteiligten Seiten.*

Beweis. Es sei $[A_0,A_1,\dots, A_n]$ ein n-Simplex. O.B.d.A. betrachten wir eine m-Facette $[A_0,A_1,\dots, A_m]$ mit $m < n$; die Gegenseite ist die (n – m – 1)-Facette $[A_{m+1},\dots, A_n]$. Die Behauptung folgt nun sofort daraus, dass man die definierende Gleichung für den Schwerpunkt in der Form

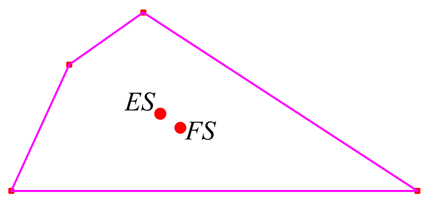
$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{m}+1}{\boldsymbol{n}+1}\left(\frac{1}{\boldsymbol{m}+1}(\sum_{j=0}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{A}_j)\right) + \frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}+1}\left(\frac{1}{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}(\sum_{j=\boldsymbol{m}+1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_j)\right)$$

schreiben kann. (Im Fall $n = 3$, $m = 1$ ist das die schon synthetisch bewiesene Tatsache, dass der Schwerpunkt eines Tetraeders der Mittelpunkt der Strecken ist, die jeweils den Mittelpunkt einer Kante mit dem Mittelpunkt der Gegenkante verbinden). *qed*

Den Schwerdreiecken im Fall des Tetraeders entsprechen im allgemeinen Fall eines n-Simplexes $[A_0,A_1,\dots, A_n]$ die Simplizes, die von dem Schwerpunkt einer Seite und den Ecken der Gegenseite gebildet werden. Da jedes solche Simplex eine Schwerlinie enthält, enthält es auch den Schwerpunkt des Simplexes $[A_0,A_1,\dots, A_n]$. Damit ist die Analogie zum ebenen Fall vollständig.

Aber das Thema „Schwerpunkte eines n-Simplexes“ ist noch nicht erledigt. Schon beim Dreieck kann man neben dem üblichen Schwerpunkt, der physikalisch dem Schwerpunkt des Systems der mit gleichen Massen belegten Ecken entspricht, auch den

Kantenschwerpunkt (oder *Umfangsschwerpunkt*) und den *Flächenschwerpunkt* betrachten. Der Kantenschwerpunkt ist der physikalische Schwerpunkt der homogen mit Masse belegten Seiten des Dreiecks, der Flächenschwerpunkt ist der Schwerpunkt der homogen mit Masse belegten Dreiecksfläche. Der Flächenschwerpunkt eines Dreiecks stimmt mit dem Eckenschwerpunkt überein. Das gilt – wie wir sehen werden – allgemein für *n*-Simplizes, der Eckenschwerpunkt und der Volumenschwerpunkt fallen zusammen. Das ist nicht so bei ebenen Vierecken (siehe Karl Seebach, Über die Schwerpunkte von Dreiecken, Vierecken und Tetraedern, in: *Didaktik der Mathematik* **11** (1983), Seiten 270-282 und **12** (1984), Seiten 36-44); Eckenschwerpunkt *ES* und Flächenschwerpunkt *FS* stimmen nur bei Parallelogrammen überein, ansonsten sind sie verschieden:



Intermezzo: Ecken- und Flächenschwerpunkt eines ebenen konvexen Vierecks.
Es sei [A,B,C,D] ein ebenes konvexes Viereck. Den *Eckenschwerpunkt* erhält man folgendermaßen: Physikalisch handelt es sich um den Schwerpunkt des Systems von Massenpunkten, bestehend aus den vier Ecken, jede mit der gleichen Masse versehen. Dieses hat den gleichen Schwerpunkt wie das System von zwei Massenpunkten, bestehend aus den Mittelpunkten zweier gegenüberliegender Seiten (oder der beiden Diagonalen) auch wieder mit den gleichen Massen versehen. Der Eckenschwerpunkt ist also der Mittelpunkt der Verbindungsstrecken der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten beziehungsweise der Mittelpunkte der Diagonalen. Dass die drei so definierten Punkte zusammenfallen, gehört in das Umfeld des Satzes von Varignon. Vektoralgebraisch zeigt dies die folgende Rechnung

$$ES = \frac{1}{4}(A+B+C+D) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(C+D)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}(B+D)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A+D)+\frac{1}{2}(B+C)\right).$$

Die Bestimmung des *Flächenschwerpunktes FS* gestaltet sich etwas komplizierter. Zunächst ersetzen wir die Gesamtmasse durch ein System von zwei Massenpunkten, in dem wir die auf das Dreieck $[A,B,C]$ entfallende Masse auf den Schwerpunkt S_D dieses Dreiecks konzentrieren, und die auf das Dreieck $[C,D,A]$ entfallende Masse auf den Schwerpunkt S_B dieses Dreiecks. Der Flächenschwerpunkt FS, also der Schwerpunkt dieses Systems von Massenpunkten liegt dann auf der Geraden S_DS_B. Ebenso liegt dieser Punkt auf der Geraden S_AS_C, wobei S_A den Schwerpunkt des Dreiecks $[B,C,D]$ bezeichnet und S_C den Schwerpunkt des Dreiecks $[D,A,B]$. Damit ergibt sich der Flächenschwerpunkt FS des Vierecks als Schnittpunkt der Geraden S_DS_B und S_AS_C. Zur Vereinfachung der vektoralgebraischen Behandlung (unter Benutzung eines Computeralgebrasystems) wählen wir ein Koordinatensystem mit der Ecke A als Ursprung. Die Ortsvektoren der Ecken B und D bilden dann eine Basis des zweidimensionalen Vektorraums, der das Viereck enthält. Damit besitzt die Ecke C eine eindeutige Darstellung der Form $C = vB + wD$; wegen der vorausgesetzten Konvexität des Vierecks gilt für die reellen Koeffizienten: v, $w > 0$ und $v + w > 1$. Die Schwerpunkt der vier Dreiecke, die man durch Weglassen jeweils einer Ecke erhält, berechnen sich zu:

$$S_A = \frac{1}{3}((1+v)B + (1+w)D),\ S_B = \frac{1}{3}(vB + (1+w)\mathrm{D}),\ S_C = \frac{1}{3}(B + D),\ S_D = \frac{1}{3}((1+v)B + wD).$$

Die Geraden S_DS_B und S_AS_C schneiden sich in dem Punkt

$$FS = \frac{w + vw + v^2}{3(v + w)}B + \frac{v + vw + w^2}{3(v + w)}C.$$

Dagegen ergibt sich für den Eckenschwerpunkt unter Berücksichtigung des gewählten Koordinatensystems

$$ES = \frac{1 + v}{4}B + \frac{1 + w}{4}C.$$

Die beiden Schwerpunkte fallen genau dann zusammen, wenn die beiden Gleichungen

$$\frac{1 + v}{4} = \frac{w + vw + v^2}{3(v + w)},\quad \frac{1 + w}{4} = \frac{v + vw + w^2}{3(v + w)}$$

erfüllt sind. Diese Gleichungen bilden ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten v und w. Es hat die eindeutige Lösung $v = 1$, $w = 1$. Für diese Koeffizienten ist das Ausgangsviereck aber ein Parallelogramm. Damit ist gezeigt, dass bei einem konvexen ebenen Viereck Ecken- und Flächenschwerpunkt genau dann zusammenfallen, wenn das Viereck ein Parallelogramm ist. *Ende des Intermezzos*.

Der Kantenschwerpunkt eines Dreiecks [A,B,C] mit den Seiten a, b, c lässt sich folgendermaßen bestimmen. Wir ersetzen das kontinuierliche Massensystem auf dem Umfang des Dreiecks durch das System aus Massenpunkten, das entsteht, in dem man die die Mittelpunkte der Seiten mit den Massen a, b, c belegt. Nach Normalisierung auf die Gesamtmasse 1 ergibt sich der Kantenschwerpunkt KS des Dreiecks zu

$$\boldsymbol{KS} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\right)+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A})\right)+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\right)=$$
$$=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}\boldsymbol{B}+\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}\boldsymbol{C};$$

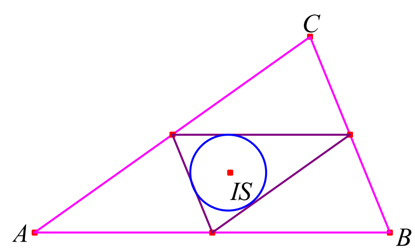
also hat KS die baryzentrischen Koordinaten ($b + c$, $c + a$, $a + b$). Zusätzliche Eigenschaften dieses Punktes finden wir, indem wir ihn in der Encyclopedia of Triangle Centers aufsuchen. Dazu müssen wir seine normalisierten trilinearen Koordinaten für ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 6$, $b = 9$, $c = 13$ (und der Fläche F = $4\cdot\sqrt{35}$) bestimmen. Wir berechnen zunächst den dazu benötigen Faktor

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\cdot\mathbf{F}}{2\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}=\frac{\sqrt{35}}{7}$$

und erhalten als normalisierte trilineare Koordinaten von KS das Tripel

$$\left(\frac{11}{21}\sqrt{35}\approx 3{,}098898934004, \frac{19}{63}\sqrt{35}, \frac{15}{91}\sqrt{35}\right).$$

Damit identifizieren wir den Kantenschwerpunkt KS als den Punkt X_{10}, also als den Mittelpunkt des *Spieker-Kreises*, des Inkreises des von den Mittelpunkten der Dreiecksseiten gebildeten Dreiecks. Der Pate ist der Potsdamer Oberlehrer und Gymnasialprofessor Theodor Spieker (1823-1913), Verfasser eines in vielen Auflagen erschienenen und viel benutzten *Lehrbuch*es *der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten*. Die Überstimmung des Kantenschwerpunkts mit dem Mittelpunkt des Spiekerkreis lässt sich leicht nachprüfen, in dem man die baryzentrischen Koordinaten des letzteren bestimmt.



Dazu berechnen wir die Fläche des Dreiecks $AB(IS)$. Ausgehend von der Grundlinie $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{c}$ haben wir die zugehörige Höhe zu bestimmen. Sie ist offensichtlich die halbe Höhe h_c des Dreiecks ABC minus dem Radius des Spiekerkreises. Das Mittendreieck erhält man aus dem Ausgangsdreieck durch zentrische Streckung am Schwerpunkt im Verhältnis $-\frac{1}{2}$. Die gleiche Abbildung führt den Inkreis des Ausgangsdreiecks mit dem Radius $\rho = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{s}}$ in den Spiekerkreis über. Also ist der Radius des Spiekerkreises gleich

$$\frac{\rho}{2} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot \boldsymbol{h}_c}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}.$$

Damit erhalten wir für die Höhe des Dreiecks $AB(IS)$

$$\frac{\boldsymbol{h}_c}{2} - \frac{\boldsymbol{c}\cdot \boldsymbol{h}_c}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})} = \frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{h}_c}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}$$

und für die Fläche

$$\frac{1}{2}\cdot \boldsymbol{c}\cdot \frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{h}_c}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})} = \frac{\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}.$$

Analog berechnen wir die Flächen der Dreiecke $BC(IS)$ und $CA(IS)$, womit wir die normalisierten baryzentrischen Koordinaten des Mittelpunkts des Spiekerkreises erhalten:

$$\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})},\ \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})},\ \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}.$$

Als allgemeine baryzentrische Koordinaten dieses Punktes können wir dann das Tripel $(b + c\ ,\ c + a\ ,\ a + b)$ nehmen, was zu zeigen war.

Um die verschiedenartigen Schwerpunkte n-dimensional behandeln zu können, brauchen wir noch einigen Bezeichnungen. Für ein Simplex $\Delta = [A_0, A_1, \dots, A_n]$ und natürliche Zahlen $d, j \in \{0,1,\dots,n\}$ bezeichne $Sk_d(\Delta)$ das *d-Skelett* von Δ, das heißt, die Menge der d-Facetten von Δ, und $Sk_{d,j}(\Delta)$ die Menge der d-Facetten, die die Ecke A_j enthalten. Die Mengen $Sk_d(\Delta)$ bestehen aus $\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}+1\\ \boldsymbol{d}+1\end{pmatrix}$ Elementen, die Mengen $Sk_{d,j}(\Delta)$ aus $\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{d}\end{pmatrix}$ Elementen. Ferner sei $|Sk_d(\Delta)|$ das *d-Gerüst* von Δ, das heißt, die Vereinigung der d-

Facetten, also eine Teilmenge von Δ. Speziell ist $|Sk_0(\Delta)| = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ und $|Sk_n(\Delta)| = \Delta$; die Menge $|Sk_1(\Delta)|$ nennt man auch das Kantengerüst von Δ.

Die verschiedenen Schwerpunkte ergeben sich nun daraus, dass man sich ein d-Gerüst des Simplexes Δ homogen mit Masse belegt denkt; den physikalischen Schwerpunkt dieses Systems nennen wir *d-Schwerpunkt* von Δ und bezeichnen ihn durch S_d. In diesem Sinne ist der von uns zunächst betrachtete Eckenschwerpunkt der 0-Schwerpunkt, der Flächen- (bei $n = 2$) oder Volumenschwerpunkt (bei $n > 2$) ist der n-Schwerpunkt. Der bisherige Kantenschwerpunkt ist in der neuen Terminologie der 1-Schwerpunkt. Um den d-Schwerpunkt eines Simplexes zu bestimmen, ersetzen wir das kontinuierliche Massensystem durch ein System von Massenpunkten, in dem wir dem (Ecken-) Schwerpunkt

$$\boldsymbol{S}(\Delta^d) = \frac{1}{\boldsymbol{d}+1} \sum_{A_j \in \Delta^d} \boldsymbol{A}_j$$

einer d-Facette Δ^d das Volumen $\mathrm{V}(\Delta^d)$ dieser Facette als Masse zuordnen. Wir haben $\binom{\boldsymbol{n}+1}{\boldsymbol{d}+1}$ solcher Schwerpunkte $S(\Delta^d)$, im Fall $d = n$-1 also $\binom{n+1}{n} = n+1$ Schwerpunkte $S(\Delta^{n-1})$. Eine nun nahe liegende Frage beantwortet das

Lemma. *Die* $n + 1$ *Schwerpunkte der (*n-1*)-dimensionalen Seiten eines n-Simplexes* Δ *sind affin unabhängig*, bilden also selbst ein n-Simplex, das *Schwerpunktsimplex* von Δ.

Beweis. Wir bezeichnen mit S_j den Schwerpunkt der Gegenseite zu der Ecke A_j, also

$$S_j = \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} A_i = -\frac{1}{n}A_j + \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} A_i\right) = -\frac{1}{n}A_j + \frac{n+1}{n}S.$$

Die Punkte S_j sind die Bilder der Ecken des Simplexes unter der zentrischen Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-\frac{1}{n}$ und damit affin unabhängig. *qed*

Wir setzen zur Abkürzung $\mathrm{V}_d = \Sigma\, \mathrm{V}(\Delta^d)$, wobei über alle $\Delta^d \in Sk_d(\Delta)$ summiert wird, und $\mathrm{V}_{d,j}$ für die Einschränkung dieser Summation auf die $\Delta^d \in Sk_{d,j}(\Delta)$. Damit erhalten wir

$$\boldsymbol{S}_d = \frac{1}{\mathbf{V}_d} \sum \mathbf{V}(\Delta^d) \cdot \boldsymbol{S}(\Delta^d).$$

Die j-te normalisierte baryzentrische Koordinate von S_d berechnet sich durch Vertauschung der Summationen zu $\frac{\mathbf{V}_{d,j}}{(d+1)\cdot\mathbf{V}_d}$. Zur Überprüfung dieser Rechnung kann man überlegen, warum die Summe dieser Koordinaten wirklich 1 ergibt. Dies folgt daraus, dass jedes Volumen $\mathrm{V}(\Delta^d)$ einer d-Facette in genau $d + 1$ Summen $\mathrm{V}_{d,j}$ vorkommt, da eine d-Facette $d + 1$ Ecken hat. Also sind $(\mathrm{V}_{d,0},\mathrm{V}_{d,1},\ldots,\mathrm{V}_{d,n})$ die allgemeinen baryzentrischen Koordinaten des d-Schwerpunktes S_d.

Es seien speziell die beiden Extremfälle betrachtet:

- Die Größe $\mathrm{V}_{0,j}$ ist das 0-dimensionale Volumen eines 0-Simplexes, das wir als 1 berechnet haben. Also hat S_0 die baryzentrischen Koordinaten $(1,1,\ldots,1)$ und es folgt $S_0 = S$, was mit dem Ansatz übereinstimmt.
- Jede Ecke gehört zu genau einer n-Facette, nämlich dem Simplex selbst. Also $\mathrm{V}_{n,j} = \mathrm{V}$ für alle j und S_n hat die baryzentrischen Koordinaten $(\mathrm{V},\mathrm{V},\ldots,\mathrm{V})$, die den gleichen Punkt beschreiben wie $(1,1,\ldots,1)$. Also ist auch $S_n = S$: *Für jedes Simplex stimmen Eckenschwerpunkt und Volumenschwerpunkt überein.*

Nun stellt sich die Frage, ob es Analogien zur Gleichheit von Kantenschwerpunkt und Mittelpunkt des Spiekerkreises eines Dreiecks in höheren Dimensionen gibt. Dazu liegt es nahe, zunächst einmal die Insphäre des von den Schwerpunkten der Seitenflächen (= (n – 1)- Facetten) eines n-Simplexes $\Delta = [A_0, A_1, \ldots, A_n]$ gebildeten n-Simplexes $\Delta' = [A'_0, A'_1, \ldots, A'_n]$, des *Schwerpunktsimplexes* von Δ, zu betrachten, wobei A'_j den Schwerpunkt der Gegenseite der Ecke A_j bezeichnet.

Wir erinnern dazu zunächst an den Begriff einer *Sphäre* im k-dimensionalen euklidischen Raum. Die Menge aller Punkte, die von einem festem Punkt einen festen Abstand haben, bildet eine *Hypersphäre*; der feste Punkt ist der *Mittelpunkt* der Hypersphäre, der festen Abstand der *Radius*. Eine *n-Sphäre*, $n \in \{0,1,\ldots,k\text{-}1\}$, ist der Durchschnitt einer Hypersphäre mit einem affinen Unterraum der Dimension $n + 1$, falls dieser Durchschnitt mindestens zwei Punkte enthält. Der Mittelpunkt der n-Sphäre ist der Fußpunkt des vom Mittelpunkt der Hypersphäre auf den affinen Unterraum gefällten Lotes; der Radius der n-Sphäre ist gegeben durch $\sqrt{r^2 - d^2}$, wobei d den Abstand des Mittelpunkts der Hypersphäre von dem affinen Unterraum bezeichnet.

Unter der *Insphäre* eines n-Simplexes (im $\mathbb{R}^n$) versteht man eine (n – 1)-Sphäre, deren Mittelpunkt im Inneren des Simplexes liegt (alle normalisierten baryzentrischen Koordinaten positiv) und die mit jeder Seitenfläche genau einen Punkt gemeinsam hat. Analog zum Inkreis eines Dreiecks haben wir allgemein:

Satz. *Jedes n-Simplex besitzt genau eine Insphäre.*

Beweis. Wie oft bei Fragen von Existenz und Eindeutigkeit ist es günstig sich erst der Frage der Eindeutigkeit zuzuwenden. Angenommen, wir haben eine Insphäre. Deren Mittelpunkt I hat von allen Seitenflächen den gleichen Abstand, er sei durch ρ bezeichnet. Ferner bezeichne V_j das Volumen der der Ecke A_j gegenüberliegenden Seitenfläche. Das Volumen des von dieser Seitenfläche und dem Mittelpunkt der Sphäre gebildeten Simplexes ist dann $\frac{1}{\boldsymbol{n}}\mathbf{V}_j\rho$ und für das Gesamtvolumen V des Simplexes gilt

$$\mathbf{V} = \frac{\rho}{\boldsymbol{n}}\sum_{j=0}^{\boldsymbol{n}}\mathbf{V}_j;$$

also ist

$$\rho = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{V}}{O}$$

eindeutig bestimmt, wobei $O = \sum_{j=0}^{n}\mathbf{V}_j$ die *Oberfläche* des Simplexes bezeichnet. Für den Mittelpunkt $\boldsymbol{I}$ erhält man daraus die ebenfalls eindeutig bestimmten normalisierten baryzentrischen Koordinaten $\frac{\rho\cdot\mathbf{V}_j}{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{V}}$ und damit die allgemeinen baryzentrischen Koordinaten $(\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_1,\ldots,\mathbf{V}_n)$.

Die Existenz der Inkugel ergibt sich nun daraus, dass der Punkt I mit den baryzentrischen Koordinaten $(\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_1,\ldots,\mathbf{V}_n)$ von allen Seitenflächen den gleichen Abstand $\rho = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{V}}{O}$ hat. Die normalisierte baryzentrische Koordinate $\frac{\mathbf{V}_j}{O}$ ist ja das Verhältnis des Volumens des von dem Punkt $\boldsymbol{I}$ und der der Ecke $\boldsymbol{A}_j$ gegenüberliegenden Seitenfläche gebildeten Simplexes Δ_j zum Volumen des Gesamtsimplexes. Bezeichnet h_j die Höhe von Δ_j durch $\boldsymbol{I}$, so gilt demnach

$$\frac{\mathbf{V}_j}{O} = \frac{\frac{1}{\boldsymbol{n}}\mathbf{V}_j \boldsymbol{h}_j}{V},$$

woraus sich für h_j der von j unabhängige Wert ρ ergibt. *qed*

Im Fall $n = 2$ haben wir damit die bekannte und schon benutzte Gleichung

$$\rho = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{s}} = \frac{2 \cdot \boldsymbol{F}}{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}.$$

Nun bestimmen wir die Insphäre des Schwerpunktsimplexes $\Delta' = [A'_0, A'_1, \ldots, A'_n]$ eines n-Simplexes $\Delta = [A_0, A_1, \ldots, A_n]$. Dazu wiederholen wir, dass das Simplex Δ' aus dem Simplex Δ durch zentrische Streckung am Schwerpunkt S mit dem Faktor $-\frac{1}{\boldsymbol{n}}$ erhalten wird; der gleiche Zusammenhang besteht zwischen den Insphären von Δ und Δ'. Wir berechnen damit den Mittelpunkt I' der Insphäre von Δ':

$$\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{S} - \frac{1}{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}) = \frac{\boldsymbol{n}+1}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{S} - \frac{1}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{n}+1}{\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{\boldsymbol{n}+1}\sum_{j=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_j\right) - \frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{j=0}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{V}_j}{O}\boldsymbol{A}_j = \sum_{j=0}^{\boldsymbol{n}} \frac{O - \mathbf{V}_j}{\boldsymbol{n} \cdot O}\boldsymbol{A}_j.$$

Also hat I' die baryzentrischen Koordinaten $(\boldsymbol{O} - \mathbf{V}_1, \boldsymbol{O} - \mathbf{V}_2, \ldots, \boldsymbol{O} - \mathbf{V}_n)$. Aber jedes $\boldsymbol{O} - \mathbf{V}_j$ ist gerade die Summe der Volumina der Seitenflächen, die die Ecke A_j enthalten, also gilt $\boldsymbol{O} - \mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{n-1,j}$. Damit haben wir – in guter Analogie zum ebenen Fall – bewiesen:

Satz. *Der (n-1)-Schwerpunkt eines Simplexes stimmt mit dem Mittelpunkt der Insphäre seines Schwerpunktsimplexes überein.*

Für die übrigen d-Schwerpunkte eines Simplexes, also für $d \in \{1,2,\ldots,n\text{-}2\}$ sind (mir) keine besonderen Eigenschaften bekannt.

3. Umsphären

Es geht nun um das ***n***-dimensionale Analogon des folgenden ebenen Sachverhaltes:

Satz. *Jedes ebene Dreieck besitzt genau einen Umkreis, das heißt, es gibt genau eine Kreislinie, die die drei Ecken des Dreiecks enthält. Der Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu den Seiten des Dreiecks, der Radius* ***r*** *ist gegeben durch*

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}{4\mathbf{F}}$$

*wobei durch **a**, **b**, **c** die Längen der Seiten und durch* **F** *die Fläche des Dreiecks bezeichnet wird.*

Zunächst werden geometrische Örter betrachtet. Der geometrische Ort aller Punkte, die

1. auf einer Geraden von zwei verschiedenen Punkten gleichen Abstand haben, besteht nur aus einem Punkt, dem Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der beiden Punkte;
2. in einer Ebene
   a. von zwei verschiedenen Punkten gleichen Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke der beiden Punkte;
   b. von den Ecken eines Dreiecks gleichen Abstand haben, ist der Umkreismittelpunkt, der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der drei Seiten des Dreiecks;
3. im dreidimensionalen euklidischen Raum
   a. von zwei verschiedenen Punkten gleichen Abstand haben, ist die mittelsenkrechte Ebene der Verbindungsstrecke der beiden Punkte, das heißt die Ebene, die zu der Verbindungsstrecke senkrecht steht und deren Mittelpunkt enthält;
   b. von den Ecken eines Dreiecks gleichen Abstand haben, ist das Mittellot des Dreiecks, das im Umkreismittelpunkt des Dreiecks errichtete Lot auf die Ebene des Dreiecks; es ist der Durchschnitt der mittelsenkrechten Ebenen der drei Seiten des Dreiecks;
   c. von den Ecken eines Tetraeders gleichen Abstand haben, ist der Umkugelmittelpunkt des Tetraeders, der Schnittpunkt der Mittellote der vier Seitendreiecke und der mittelsenkrechten Ebenen der sechs Kanten des Tetraeders.

Definition. Eine $(\boldsymbol{n}-1)$-Sphäre, die alle Ecken eines $\boldsymbol{n}$-Simplexes $\boldsymbol{\Delta}$ enthält, heißt Umsphäre von $\boldsymbol{\Delta}$.

Satz. *Jedes Simplex besitzt genau eine Umsphäre.*

Beweis. Wir betrachten ein $\boldsymbol{n}$-Simplex $\boldsymbol{\Delta}$ mit den Ecken $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A_n}$ in $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Gesucht ist ein Punkt $\boldsymbol{M}$, der von allen Ecken den gleichen Abstand $\boldsymbol{r}$ hat, also eine Lösung des Gleichungssystems

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{A_j}) = \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{j} \in \{0,1,\ldots,\boldsymbol{n}\}.$$

Es handelt sich um $\boldsymbol{n}+1$ Gleichungen mit $\boldsymbol{n}+1$ Unbekannten, $\boldsymbol{n}$ Koordinaten des Punktes $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{r}$, der Radius. Zunächst können wir den Radius r eliminieren:

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{A_i}) = \mathrm{d}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{A}_0), \qquad \boldsymbol{i} \in \{1,\ldots,\boldsymbol{n}\}.$$

Da Abstände nie negativ sind, ist das Quadrieren eine Äquivalenzumformung. Damit erhalten wir:

$$(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{A_i})^2 = (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{A}_0)^2$$

$$\boldsymbol{M}^2 - 2\,\boldsymbol{MA_i} + \boldsymbol{A_i}^2 = \boldsymbol{M}^2 - 2\,\boldsymbol{MA}_0 + \boldsymbol{A}_0{}^2$$

$$(\boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A_i}^2 - \boldsymbol{A}_0{}^2) = (\boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A}_0)\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{A_i} + \boldsymbol{A}_0)$$

Jede dieser Gleichungen ist linear und hat eine geometrische Bedeutung: Die Lösungsmenge ist eine Hyperebene, die auf der Verbindungsgeraden der Punkte $\boldsymbol{A_j}$ und $\boldsymbol{A}_0$ senkrecht steht und den Mittelpunkt der Kante $[\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A_j}]$ enthält, also die zur Kante $[\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A_j}]$ mittelsenkrechte Hyperebene. Insgesamt haben wir ein lineares Gleichungssystem aus $\boldsymbol{n}$ Gleichungen mit den Vektoren $\boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A}_0$ als Zeilenvektoren der quadratischen Koeffizientenmatrix. Da diese Vektoren linear unabhängig sind, hat die Koeffizientenmatrix den Rang $\boldsymbol{n}$ und damit hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{M}$. Der Radius lässt sich dann einfach berechnen. *qed*

Es sei noch bemerkt, dass der Mittelpunkt der Umsphäre natürlich auf den mittelsenkrechten Hyperebenen aller Kanten liegt:

$$(\boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A_j})\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{M} - (\boldsymbol{A_j} - \boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A_i}^2 - \boldsymbol{A}_0{}^2) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{A_j}^2 - \boldsymbol{A}_0{}^2) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A_i}^2 - \boldsymbol{A_j}^2)$$

Eine Formel, die den Radius $\boldsymbol{r}$ der Umsphäre als Funktion der Kantenlängen darstellt, lässt sich leicht gewinnen. Ausgangspunkt bildet die frühere Volumenformel

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}(\boldsymbol{\Delta}) = \frac{1}{\boldsymbol{n}!}\,|\det(\boldsymbol{A_j} - \boldsymbol{A}_0)\,| = \frac{1}{\boldsymbol{n}!}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_j \end{pmatrix}\right|$$

Für die folgenden Rechnungen wählen wir ein Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt der Umsphäre als Ursprung.

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}!\cdot\mathrm{V} = \left|\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_j \end{pmatrix}\right|$$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}!\cdot\mathrm{V})^2 = \left(\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_j \end{pmatrix}\right)^2 = (-1)^{\boldsymbol{n}}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} & -\boldsymbol{A}_0^t \\ \boldsymbol{r} & -\boldsymbol{A}_i^t \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_j \end{pmatrix} = (-1)^{\boldsymbol{n}}\det\left(\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j\right)$$

Nebenrechnung: $\boldsymbol{a_{ij}}^2 = (\boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A_j})^2 = \boldsymbol{A_i}^2 - 2\boldsymbol{A_i}\boldsymbol{A_j} + \boldsymbol{A_j}^2 = 2\boldsymbol{r}^2 - 2\boldsymbol{A_i}\boldsymbol{A_j} \Rightarrow \boldsymbol{A_i}\boldsymbol{A_j} = \boldsymbol{r}^2 - \dfrac{\boldsymbol{a}_{ij}^2}{2}$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}!\cdot\mathrm{V})^2=\frac{(-1)^{\boldsymbol{n}}}{2^{\boldsymbol{n}+1}}\det\left(\boldsymbol{a}_{ij}^2\right)\Rightarrow\boldsymbol{r}=\frac{1}{\boldsymbol{n}!\,\mathrm{V}}\sqrt{\frac{(-1)^{\boldsymbol{n}}}{2^{\boldsymbol{n}+1}}\det\left(\boldsymbol{a}_{ij}^2\right)}=\sqrt{-\frac{\det\left(\boldsymbol{a}_{ij}^2\right)}{2\det\begin{pmatrix}0&1\\1&\boldsymbol{a}_{ij}^2\end{pmatrix}}}$$

Spezialfälle: $\boldsymbol{n}=1$: $\mathrm{V}=\boldsymbol{a}_{01}$, $\det\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{a}_{01}^2\\\boldsymbol{a}_{01}^2&0\end{pmatrix}=-\boldsymbol{a}_{01}^4\Rightarrow\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{a}_{01}}{2}$

$\boldsymbol{n}=2$: $\mathrm{V}=\mathrm{F}$, $\det\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{a}_{01}^2&\boldsymbol{a}_{02}^2\\\boldsymbol{a}_{01}^2&0&\boldsymbol{a}_{12}^2\\\boldsymbol{a}_{02}^2&\boldsymbol{a}_{12}^2&0\end{pmatrix}=2\boldsymbol{a}_{01}^2\boldsymbol{a}_{02}^2\boldsymbol{a}_{12}^2\Rightarrow\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{a}_{01}\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{02}}{4\,\mathrm{F}}$

$\boldsymbol{n}=3$:

$$\det\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{a}_{01}^2&\boldsymbol{a}_{02}^2&\boldsymbol{a}_{03}^2\\\boldsymbol{a}_{01}^2&0&\boldsymbol{a}_{12}^2&\boldsymbol{a}_{13}^2\\\boldsymbol{a}_{02}^2&\boldsymbol{a}_{12}^2&0&\boldsymbol{a}_{23}^2\\\boldsymbol{a}_{03}^2&\boldsymbol{a}_{13}^2&\boldsymbol{a}_{23}^2&0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{a}'^2&\boldsymbol{b}'^2&\boldsymbol{c}'^2\\\boldsymbol{a}'^2&0&\boldsymbol{c}^2&\boldsymbol{b}^2\\\boldsymbol{b}'^2&\boldsymbol{c}^2&0&\boldsymbol{a}^2\\\boldsymbol{c}'^2&\boldsymbol{b}^2&\boldsymbol{a}^2&0\end{pmatrix}=$$
$$=(\boldsymbol{aa}')^4+(\boldsymbol{bb}')^4+(\boldsymbol{cc}')^4-2(\boldsymbol{aa}')^2(\boldsymbol{bb}')^2-2(\boldsymbol{bb}')^2(\boldsymbol{cc}')^2-2(\boldsymbol{cc}')^2(\boldsymbol{aa}')^2=$$
$$=-(\boldsymbol{aa}'+\boldsymbol{bb}'+\boldsymbol{cc}')\cdot(-\boldsymbol{aa}'+\boldsymbol{bb}'+\boldsymbol{cc}')\cdot(\boldsymbol{aa}'-\boldsymbol{bb}'+\boldsymbol{cc}')\cdot(\boldsymbol{aa}'+\boldsymbol{bb}'-\boldsymbol{cc}')\Rightarrow\boldsymbol{r}=\frac{\widetilde{\boldsymbol{F}}}{6\,\mathbf{V}},$$

wobei $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ die Fläche des Dreiecks mit den Seiten $\boldsymbol{aa}',\boldsymbol{bb}',\boldsymbol{cc}'$ bezeichnet (Heronsche Formel). Aus dieser Rechnung folgt nebenher, dass diese Produkte der Längen der Gegenkantenpaare die Dreiecksungleichung erfüllen.

In der ebenen Geometrie interessiert eine Bedingung dafür, dass drei Punkte kollinear sind, das heißt, auf einer Geraden liegen. Im $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ stellt sich die entsprechende Frage nach $\boldsymbol{n}+1$ affin abhängigen Punkten, das heißt, $\boldsymbol{n}+1$ Punkten, die in einer Hyperebene liegen. Dafür hatten wir schon die Bedingung

$$\det\begin{pmatrix}1&1\\\boldsymbol{A}_0&\boldsymbol{A}_j\end{pmatrix}=0$$

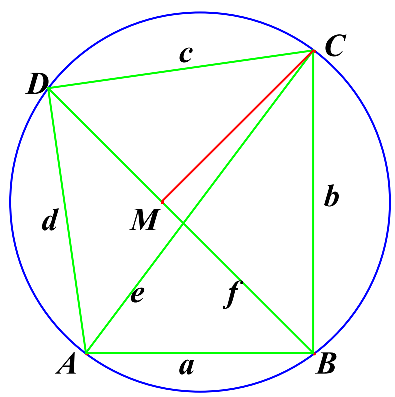
hergeleitet, die sich in der Ebene schreiben lässt als

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\\boldsymbol{x}_0&\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{y}_0&\boldsymbol{y}_1&\boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}_0\left(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\right)+\boldsymbol{x}_1\left(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_0\right)+\boldsymbol{x}_2\left(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{y}_1\right)=0.$$

In Analogie dazu sucht man Bedingungen, wann in der Ebene vier Punkte konzyklisch sind, das heißt, auf einer Kreislinie liegen, oder allgemein, wann $\boldsymbol{n}$+2 Punkte im $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ auf einer Hypersphäre liegen. Dabei beschränkt man sich auf die Betrachtung von vier Punkten, derart dass je drei von ihnen nicht kollinear sind, oder allgemein auf $\boldsymbol{n}$+2 Punkte, derart dass je $\boldsymbol{n}$+1 von ihnen affin unabhängig sind, also ein Simplex mit einer eindeutig bestimmten Umsphäre bilden. Dann ist die Frage, unter welcher Bedingung die $\boldsymbol{n}$+1 Umsphären zusammenfallen.

Betrachten wir zunächst den ebenen Fall. In der Schule lernt man, dass ein konvexes Viereck genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn sich die gegenüberliegenden Winkel zu 180° ergänzen. Leider lässt sich der Winkelbegriff nicht passend in beliebige Dimensionen verallgemeinern. Aber es hilft eine Bedingung, die auf den griechischen Mathematiker Klaudios Ptolemaios (etwa 85 – 165) zurückgeht.

Satz. *Sind* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ *die Seiten (aufeinanderfolgend) und* $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ *die Diagonalen eines konvexen Sehnenvierecks, so gilt:* $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}$.



Beweis. In der Figur ist der Punkt $\boldsymbol{M}$ so gewählt, dass gilt: $\angle \boldsymbol{DCM} = \angle \boldsymbol{ACB}$, woraus sofort folgt $\angle \boldsymbol{MCB} = \angle \boldsymbol{DCB} - \angle \boldsymbol{DCM} = \angle \boldsymbol{DCB} - \angle \boldsymbol{ACB} = \angle \boldsymbol{DCA}$. Der Satz vom Peripheriewinkel liefert $\angle \boldsymbol{MDC} = \angle \boldsymbol{BDC} = \angle \boldsymbol{BAC}$ und $\angle \boldsymbol{CBM} = \angle \boldsymbol{CBD} = \angle \boldsymbol{CAD}$. Damit sind sowohl die Dreiecke $\boldsymbol{DCM}$ und $\boldsymbol{ACB}$ als auch die Dreiecke $\boldsymbol{MCB}$ und $\boldsymbol{DCA}$ einander ähnlich. Also gilt: $\overline{\boldsymbol{DM}} : \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{e}$ und $\overline{\boldsymbol{MB}} : \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{e}$. Damit ergibt sich:

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}\cdot(\overline{\boldsymbol{DM}} + \overline{\boldsymbol{MB}}) = \boldsymbol{e}\cdot\overline{\boldsymbol{DM}} + \boldsymbol{e}\cdot\overline{\boldsymbol{MB}} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}.\ \textit{qed}$$

Der Satz von Ptolemaios liefert also eine notwendige Bedingung für die Konzyklizität von vier Punkten in einer Ebene. Allgemein gilt:

Satz. *Im* $\boldsymbol{n}$*-dimensionalen euklidischen Raum liegen* $\boldsymbol{n}$+2 *Punkte* $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}+1}$, *die nicht in einer Hyperebene liegen, genau dann auf einer Hypersphäre, wenn für die paarweisen Abstände* $\boldsymbol{a}_{ij} = \mathrm{d}(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j)$ *gilt*: $\det(\boldsymbol{a}_{ij}^2) = 0$. *Im Allgemeinen gilt* $(-1)^{n+1}\det(\boldsymbol{a}_{ij}^2) \geq 0$.

Es handelt sich also um eine Determinante der Form, wie sie zur Berechnung des Radius der Umsphäre herangezogen wurde. Bevor wir diesen Satz beweisen, machen wir uns den folgenden Sachverhalt klar. Ist ein $\boldsymbol{n}$-Simplex $\boldsymbol{\Delta} = [\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}]$ im $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ gegeben, so ist jeder weitere Punkt $\boldsymbol{X}$ durch seine Abstände $\boldsymbol{x_j}$ von den Ecken $\boldsymbol{A_j}$, $\boldsymbol{j} \in \{0,1,\ldots,\boldsymbol{n}\}$, eindeutig bestimmt. Wir haben ja die Gleichungen $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A_j})^2 = \boldsymbol{x_j}^2$. Ziehen wir die erste dieser Gleichungen von allen folgenden ab, so erhalten wir nach einfacher Umformung das Gleichungssystem

$$(\boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_0^2 - \boldsymbol{x_i}^2 - \boldsymbol{A}_0^2 + \boldsymbol{A_i}^2),\ \ \boldsymbol{i} \in \{1,2,\ldots,\boldsymbol{n}\}.$$

Dieses Gleichungssystem hat genau eine Lösung. Damit hat das ursprüngliche System quadratischer Gleichungen höchstens eine Lösung.

Wir testen den Satz erst für kleine $\boldsymbol{n}$.

$\boldsymbol{n} = 0$: Zwei Punkte im 0-dimensionalen Raum fallen zusammen, die Bedingung liefert $\boldsymbol{a}_{01}^4 = 0$, also wie gewünscht den Abstand $\boldsymbol{a}_{01} = 0$ für die beiden Punkte.

$\boldsymbol{n} = 1$: Eine Nullsphäre besteht nur aus zwei Punkten. Die Bedingung liefert $2\,\boldsymbol{a}_{01}^2\,\boldsymbol{a}_{12}^2\,\boldsymbol{a}_{02}^2 = 0$, also muss mindestens einer der Abstände verschwinden, wir haben tatsächlich nur zwei Punkte.

$\boldsymbol{n} = 2$: Wir verwenden die Bezeichnungen in der Figur zum Satz von Ptolemaios und erhalten die Bedingung (vergleiche die Berechnung des Radius):

$$(\mathrm{a{\cdot}c} + \mathrm{b{\cdot}d} + \mathrm{e{\cdot}f})\cdot(-\,\mathrm{a{\cdot}c} + \mathrm{b{\cdot}d} + \mathrm{e{\cdot}f})\cdot(\mathrm{a{\cdot}c} - \mathrm{b{\cdot}d} + \mathrm{e{\cdot}f})\cdot(\mathrm{a{\cdot}c} + \mathrm{b{\cdot}d} - \mathrm{e{\cdot}f}) = 0.$$

Zur Interpretation dieses Ergebnisses nehmen wir an, dass keine drei der vier Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ kollinear sind und betrachten das Dreieck $\boldsymbol{ABC}$ als fest. In dem angegebenen Produkt ist der erste Faktor nie Null, der vierte Faktor entspricht dem Satz von Ptolemaios. In diesem Fall liegt der Punkt auf dem Bogen des Umkreises des Dreiecks $\boldsymbol{ABC}$, der von $\boldsymbol{C}$ nach $\boldsymbol{A}$ verläuft und den Punkt $\boldsymbol{B}$ nicht enthält. Nehmen wir nun $\boldsymbol{D}$ auf dem Bogen von $\boldsymbol{A}$ nach $\boldsymbol{B}$, der den Punkt $\boldsymbol{C}$ nicht enthält, so werden die Strecken mit den Längen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$ zu Diagonalen und nach dem Satz von Ptolemaios verschwindet der zweite Faktor. Schließlich kann $\boldsymbol{D}$ noch auf dem Bogen von $\boldsymbol{B}$ nach $\boldsymbol{C}$ liegen, der $\boldsymbol{A}$ nicht enthält; dann sind die Strecken mit den Längen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{d}$ die Diagonalen und der dritte Faktor verschwindet.

Beweis des Satzes: O.B.d.A. sei $n \geq 1$. „$\Rightarrow$“: Die Punkte $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A_n}, \boldsymbol{A_{n+1}}$ liegen auf einer Hypersphäre mit Mittelpunkt $\boldsymbol{M}$ und Radius r. Die Gleichung der Hypersphäre ist also $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M})^2 = r^2$. Die Gleichung ist äquivalent zu $\boldsymbol{X}^2 - 2\boldsymbol{MX} + \boldsymbol{M}^2 - r^2 = 0$, also zu einer Gleichung der Form $\boldsymbol{X}^2 - \boldsymbol{BX} + c = 0$. Durch Einsetzen der Punkte $\boldsymbol{A}_i$ haben wir $\boldsymbol{n} + 2$ Gleichungen

$$\boldsymbol{A}_i^2 - \boldsymbol{BA}_i + c = 0.$$

Wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem aus $n + 2$ Gleichungen mit $n + 2$ Unbekannten, dessen Koeffizientenmatrix aus den Zeilen $(\boldsymbol{A}_i^2, \boldsymbol{A}_i, 1)$ besteht. Es hat die nichttriviale Lösung (1,-B,c), also muss die Determinante verschwinden. Damit berechnen wir:

$$0 = (\det(A_i^2, A_i, 1))^2 = \det(A_i^2, A_i, 1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 \\ -2\boldsymbol{A}_j \\ \boldsymbol{A}_j^2 \end{pmatrix} = \det(A_i^2 + A_j^2 - 2A_i\, A_j) = \det(a_{ij}^2).$$

„$\Leftarrow$“: In der obigen Faktorzerlegung von $\det(a_{ij}^2)$ unterscheiden sich die beiden Faktoren nur um die von Null verschiedene Konstante $-(-2)^n$. Da das Produkt Null ist, muss jeder der Faktoren Null sein. Also hat das vorhin beschriebene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung (a,-B,c). Wäre $a = 0$, so würden die $n + 2$ Punkte A_j im Widerspruch zur Voraussetzung in der Hyperebene mit der Gleichung $BX = c$ liegen. Also gibt es eine Lösung der Form (1,-B,c). Dann liegen die Punkte auf der Hypersphäre mit dem Mittelpunkt $M = ½B$ und dem Radius $r = \sqrt{\boldsymbol{M}^2 - \boldsymbol{c}}$, vorausgesetzt $B^2 > 4c$. Letzteres ergibt sich durch folgende Überlegung: Da die $n + 2$ Punkte $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_{n+1}$ nicht in einer Hyperebene liegen, können nicht alle gleich M sein. O.B.d.A. sei $\boldsymbol{A}_0 \neq M$. Dann gilt

$$0 = A_0^2 - BA_0 + c = (A_0^2 - M)^2 + c - B^2/4;$$

Wegen $(A_0^2 - M)^2 > 0$ gilt dann $c - B^2/4 < 0$, was zu zeigen war.

Schließlich zeigt die obige Rechnung:

$$\det(a_{ij}^2) = \det(A_i^2, A_i, 1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 \\ -2\boldsymbol{A}_j \\ \boldsymbol{A}_j^2 \end{pmatrix} = -(-2)^{\mathrm{n}}\, (\det(A_i^2, A_i, 1))^2,$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt. *qed*

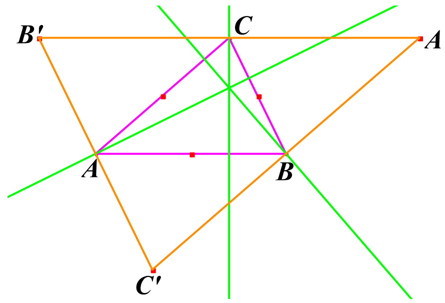
4. Höhen

Zunächst sei an die entsprechende Situation in der Planimetrie erinnert. Die von den Ecken eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällte Lote sind die Höhen des Dreiecks. Es gilt der

Satz. *Die drei Höhen eines Dreiecks sind kopunktal.*

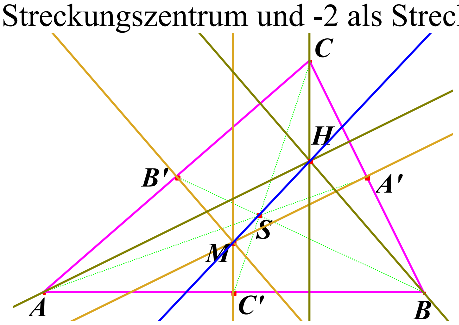
Beweis. Wir betrachten zwei Beweise mit Mitteln der Schulgeometrie.

1. unter Verwendung der Punktspiegelung (7. Jahrgangsstufe): Ein gegebenes Dreieck ABC wird an den Mitten der drei Seiten gespiegelt.



Damit werden die Höhen des Dreiecks ABC zu den Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'B'C'$ und diese schneiden sich – das kann als bekannt vorausgesetzt werden – in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A'B'C'$.

2. unter Verwendung der zentrischen Streckung (9. Jahrgangsstufe). Auch hierbei wird davon ausgegangen, dass sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Nun wird das Seitenmittendreieck zentrisch gestreckt, mit dem Schwerpunkt S als Streckungszentrum und -2 als Streckungsfaktor.



Dabei wird das Seitenmittendreieck $A'B'C'$ in das Dreieck ABC abgebildet, die Mittelsenkrechten auf die Höhen, der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten auf einen Punkt, in dem sich die Höhen schneiden, den Höhenschnittpunkt H. Dieser Beweis hat noch eine interessante Konsequenz: Der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks liegen auf einer Geraden, der ***Euler-Geraden*** des Dreiecks; der Schwerpunkt teilt die Verbindungsstrecke von Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt innen im Verhältnis 1 : 2. Jedoch fallen diese Punkte bei einem gleichseitigen Dreieck zusammen; dann ist die Eulersche Gerade nicht defininiert. *qed*

Dieser Sachverhalt soll nun in den n-dimensionalen Raum, insbesondere in die dritte Dimension übertragen werden. Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ besitzt jeder Untervektorraum U ein eindeutig bestimmtes orthogonales Komplement $\mathsf{U}^\perp$; dies ist wieder ein Untervektorraum und es gilt:

$$\dim \mathsf{U} + \dim \mathsf{U}^\perp = n,$$

$$\mathsf{U} \cap \mathsf{U}^\perp = \{0\}.$$

Ist $U_1, U_2, \ldots, U_k$ eine Basis des Untervektorraumes U, so ist das orthogonale Komplement $\mathsf{U}^\perp$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$U_j \cdot X = 0,\ j \in \{1,2,\ldots,k\}.$$

Zu einem affinen Unterraum $A + \mathsf{U} \subset \mathbb{R}^n$ und einem beliebigen Punkt $B \in \mathbb{R}^n$ definiert man das ***Lot*** von B auf $A + \mathsf{U}$ als den affinen Unterraum $B + \mathsf{U}^{\perp}$. Allerdings wird das Wort „Lot“ häufig nur im Fall $\dim \mathsf{U} = n - 1$ verwendet, also wenn es sich um eine Gerade handelt. Im Fall $\dim \mathsf{U} = 1$, also $\dim \mathsf{U}^{\perp} = n - 1$, spricht man von ***Lothyperebene***, speziell bei $n = 3$ von ***Lotebene***. Es sei noch an die folgenden Sprechweisen erinnert:

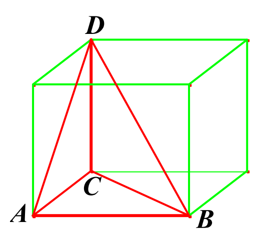
- ist $B \in A + \mathsf{U}$, so ist $B + \mathsf{U}^{\perp}$ das in B auf U ***errichtete*** Lot;
- ist $B \notin A + \mathsf{U}$, so ist $B + \mathsf{U}^{\perp}$ das von B auf U ***gefällte*** Lot;
- der einzige Punkt in $A + \mathsf{U} \cap B + \mathsf{U}^{\perp}$ ist der ***Fußpunkt*** der Lotes.

Konvention. Unter Kanten und Seiten eines Simplexes verstehen wir im Folgenden auch die von den darin liegenden Ecken aufgespannten affinen Unterräume, also Geraden, Ebenen, Hyperebenen …. Es ist jeweils aus dem Zusammenhang klar, ob die eigentliche Facette, die beschränkte konvexe Menge, oder der unbeschränkte affine Unterraum gemeint ist.

Für ein n-Simplex $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

- die von einer Ecke auf die gegenüberliegende (n-1)-dimensionale Seite gefällten Lote als ***Raumhöhen*** – es handelt sich um Geraden –
- die vom Schwerpunkt einer (n-2)-dimensionalen Seite auf die Gegenkante gefällten Lote als ***Höhenhyperebenen***,
- speziell im Fall $n = 3$, sind dies die ***Höhenebenen***, die senkrecht zu einer Kante sind und den Mittelpunkt der Gegenkante enthalten,
- die Fußpunkte der Lote heißen ***Höhenfußpunkte***.

Im Fall $n = 2$ fallen die Raumhöhen und die Höhenhyperebenen zusammen, es handelt sich um die gewöhnlichen Höhen eines Dreiecks. Die Schwierigkeiten ergeben sich daraus, dass die Raumhöhen – im Gegensatz zur ebenen Situation – sich im Allgemeinen nicht in einem Punkt schneiden. Betrachten wir zum Beispiel im $\mathbb{R}^3$ das Tetraeder mit den Ecken $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$, $D = (0,1,1)$:



Die Geraden AB und CD bilden ein Paar windschiefer Raumhöhen! Jedoch gilt:

Satz. *Die* $\binom{n+1}{2}$ *Höhenhyperebenen eines n-Simplexes schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis. Es sei $\Delta = [A_0, A_1, \ldots, A_n]$ ein n-Simplex im $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten zunächst die Höhenhyperebenen, die senkrecht zu den Kanten A_0A_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sind; diese sind gegebenen durch die Gleichungen

$$(A_i - A_0)\cdot X = (A_i - A_0)\cdot \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\left(\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}}\right),\ i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Es handelt sich um ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen für n Unbekannte, dessen Koeffizientenmatrix aus linear unabhängigen Zeilen besteht, also Maximalrang hat. Dieses Gleichungssystem hat genau eine Lösung; sie sei durch H_M bezeichnet. Wir berechnen für $0 \neq \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \neq 0$:

$$(A_i - A_j)\cdot H_M = (A_i - A_0)\cdot H_M - (A_j - A_0)\cdot H_M =$$

$$= (A_i - A_0)\cdot \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\left(\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}}\right) - (A_j - A_0)\cdot \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\left(\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{j}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\left(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}}\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}}^2 - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{j}}\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{j}}^2\right) = \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{j}})\cdot\left(\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{j}}\right).$$

Dies ist aber gerade die Bedingung dafür, dass der Punkt H_M auch auf den übrigen Höhenhyperebenen liegt. *qed*

Für $n = 3$, also für das Tetraeder, wurde dieser Punkt von Gaspard Monge, dem Erfinder der Darstellenden Geometrie, gefunden. Er beschreibt ihn in seiner Arbeit

> Sur la pyramide triangulaire, Correspondance sur l'école impériale polytechnique 2/3 (1811), Seiten 263-266.

Ihm zu Ehren nennt man den Punkt heute ***Punkt von Monge*** oder ***Monge-Punkt***. Wir bemerken, dass im Fall $n = 2$ der Punkt von Monge gerade der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist. Im Allgemeinen gestattet der Punkt von Monge die Definition eines n-dimensionalen Analogons zur Euler-Geraden.

Satz. *In einem n-Simplex sind der Umsphären-Mittelpunkt M, der Schwerpunkt S und der Monge-Punkt kollinear. Der Schwerpunkt S teilt die Strecke* $[M,H_M]$ *im Verhältnis* $(n\text{-}1) : 2$.

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen des vorigen Beweises. Die Behauptung besagt:

$$S = \frac{2}{\boldsymbol{n}+1}\boldsymbol{M} + \frac{\boldsymbol{n}-1}{\boldsymbol{n}+1}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{M}},$$

was gleichbedeutend ist mit

$$(n + 1)\, S - 2\, M - (n - 1)H_M = 0.$$

Wir berechnen für $i \in \{1,2,\ldots,n\}$:

$(A_i - A_0)\cdot(\,(n + 1)\, S - 2\, M - (n - 1)H_M) =$

$$= (A_i - A_0)\cdot \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{A_k} \; - (A_i^2 - A_0^2) - (A_i - A_0)\cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A_k} - \boldsymbol{A_i} \right) =$$

$$= (A_i - A_0)\cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{A_k} - \boldsymbol{A_i} - \boldsymbol{A_0} - \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A_k} + \boldsymbol{A_i} \right) = 0.$$

Da das homogene lineare Gleichungssystem $(A_i - A_0)\cdot X = 0$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, nur die triviale Lösung besitzt, folgt die Behauptung. *qed*

Nun interessieren Bedingungen dafür, dass sich die Raumhöhen eines Simplexes in einem Punkt schneiden. Simplizes mit dieser Eigenschaft heißen ***orthozentrisch***. Wir betrachten das Problem zunächst allgemein für ein n-Simplex $\Delta = [A_0, A_1, \ldots, A_n]$ im $\mathbb{R}^n$. Wenn es orthozentrisch ist, so gibt es einen Punkt H, derart dass für alle $i, j, k \in \{0,1,\ldots,n\}$ mit $i \neq j \neq k$ gilt:

$$(H - A_j)\cdot(A_i - A_k) = 0,$$

das heißt,

$$(A_i - A_k)\cdot H = (A_i - A_k)\cdot A_j.$$

Da die linke Seite dieser Gleichungen unabhängig von j ist, muss es auch die rechte Seite sein, dass heißt es muss für $l \in \{0,1,\ldots,n\}$ mit $i \neq l \neq k$ gelten:

$$(A_i - A_k)\cdot A_j = (A_i - A_k)\cdot A_l,$$

was äquivalent ist zu

$$(A_i - A_k)\cdot(A_j - A_l) = 0.$$

Das bedeutet, je zwei disjunkte Kanten – je zwei Gegenkanten im Tetraeder – müssen zueinander orthogonal sein. Diese Bedingung ist im Fall $n = 2$ trivialerweise erfüllt und im Allgemeinen auch hinreichend.

Satz. *Ein n-Simplex ist genau dann orthozentrisch, wenn je zwei disjunkte Kanten zueinander orthogonal sind.*

Beweis. Das lineare Gleichungssystem

$$(A_1 - A_0)\cdot X = (A_1 - A_0)\cdot A_2,$$

$$(A_i - A_0)\cdot X = (A_i - A_0)\cdot A_1,\ i \in \{2,3,\ldots,n\}$$

hat genau eine Lösung H. Für diese Lösung gilt:

- $(A_i - A_k)\cdot H = (A_i - A_0)\cdot H - (A_k - A_0)\cdot H = (A_i - A_0)\cdot A_1 - (A_k - A_0)\cdot A_1 =$
  $= (A_i - A_k)\cdot A_1 = (A_i - A_k)\cdot A_j$
  für $i, k \neq 1$, $i \neq j \neq k$ – die letzte Gleichheit folgt aus der Voraussetzung;
- $(A_i - A_1)\cdot H = (A_i - A_0)\cdot H - (A_1 - A_0)\cdot H = (A_i - A_0)\cdot A_1 - (A_1 - A_0)\cdot A_2 =$
  $= (A_i - A_0)\cdot A_2 - (A_1 - A_0)\cdot A_2 = (A_i - A_1)\cdot A_2 = (A_i - A_1)\cdot A_j$
  für $i \neq 1, 2$, $i \neq j \neq 1$;
- $(A_2 - A_1)\cdot H = (A_2 - A_0)\cdot H - (A_1 - A_0)\cdot H = (A_2 - A_0)\cdot A_1 - (A_1 - A_0)\cdot A_2 =$
  $= (A_2 - A_1)\cdot A_0 = (A_2 - A_1)\cdot A_j$
  für $1 \neq j \neq 2$;
- $(A_1 - A_k)\cdot H = (A_1 - A_0)\cdot H - (A_k - A_0)\cdot H = (A_1 - A_0)\cdot A_2 - (A_k - A_0)\cdot A_1 =$
  $= (A_1 - A_0)\cdot A_2 - (A_k - A_0)\cdot A_2 = (A_1 - A_k)\cdot A_2 = (A_1 - A_k)\cdot A_j$
  für $k \neq 1, 2$, $1 \neq j \neq k$;
- $(A_1 - A_2)\cdot H = -(A_2 - A_1)\cdot H = -(A_2 - A_1)\cdot A_j = (A_1 - A_2)\cdot A_j$
  für $1 \neq j \neq 2$. *qed*

Bemerkung. In diesem Satz kommt es nur auf die Orthogonalität disjunkter Kantenpaare an, die sich nicht ändert, wenn man das Simplex in einem höher-dimensionalen Raum oder statt des gesamten Simplexes nur eine seiner Facetten betrachtet. Das bedeutet, dass die angegebene Bedingung für die Orthozentrizität auch für nieder-dimensionale Simplizes in höher-dimensionalen Räumen gilt.

Folgerung. *Ein Simplex ist orthozentrisch, wenn jede 3-Facette orthozentrisch ist. Umgekehrt ist jede k-Facette, $k \geq 2$, eines orthozentrischen Simplexes orthozentrisch.*

Für 3-Simplizes, also Tetraeder kann man diesen Satz auch synthetisch begründen. Wir beweisen zunächst das folgende

Lemma. *Die Raumhöhen h_A und h_D durch die Ecken A und D eines Tetraeders* $[A,B,C,D]$ *schneiden sich genau dann, wenn die Kanten AD und BC orthogonal zueinander sind.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Raumhöhen h_A und h_D nicht zueinander parallel sein können. Wäre das der Fall, so wären auch die dazu senkrechten Ebenen BCD und ABC parallel und – wegen der gemeinsamen Punkte B, C – sogar gleich. Also würden die vier Ecken des Tetraeders in einer Ebene liegen, im Widerspruch zur Definition eines Tetraeders. Da die Raumhöhen h_A und h_D nicht parallel sind, sind sie insbesondere verschieden.

„⇒“: Da sich die Geraden h_A und h_D nach Voraussetzung schneiden aber nicht zusammenfallen, haben sie genau einen Schnittpunkt H und spannen eine Ebene Ε auf, die die Ecken A und D des Tetraeders und damit die ganze Kante AD enthält. Da die Raumhöhe h_A senkrecht auf der Ebene BCD steht, ist sie insbesondere orthogonal zu der Kante BC; da die Raumhöhe h_D senkrecht auf der Ebene ABC steht, ist sie auch orthogonal zu der Kante BC. Also ist die Kante BC orthogonal zu zwei nicht parallelen Geraden der Ebene Ε und damit orthogonal zu allen Geraden dieser Ebene, insbesondere zu der Kante AD.

„⇐“: Jetzt wird vorausgesetzt, dass die Kanten AD und BC zueinander orthogonal sind. Da die Raumhöhen h_A und h_D verschieden sind, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Raumhöhe h_D nicht mit der Kante AD zusammenfällt, diese beiden sich in der Ecke D schneidenden Geraden also eine Ebene Ε aufspannen. Die Kante BC ist nach Voraussetzung orthogonal zu der Kante AD und nach Definition orthogonal zu der Raumhöhe h_D, steht also senkrecht auf der Ebene Ε. Mit T sei der Durchstoßpunkt der Kante BC durch die Ebene Ε bezeichnet und mit h die Höhe des ganz in der Ebene Ε liegenden Dreiecks ADT durch die Ecke A. Die Gerade h liegt ebenfalls in der Ebene Ε und ist damit orthogonal zu der Kante BC; nach Definition ist die Gerade h aber auch orthogonal zu der Geraden DT. Damit steht die Gerade h senkrecht auf der von den sich in T schneidenden Geraden BC und DT aufgespannten Ebene; das ist die Ebene BCD. Da die Gerade h außerdem durch die Ecke A verläuft, handelt es sich um die Raumhöhe h_A: $h = h_A$. Die Raumhöhen h_A und h_D liegen also beide in der Ebene Ε; da sie nicht parallel sind, müssen sie sich schneiden. *qed*

Dieses Lemma erlaubt einige interessante Folgerungen. Da die Orthogonalität eine symmetrische Relation auf der Menge der Geraden ist, ergibt sich durch doppelte Anwendung des Lemmas

Folgerung. *Die Raumhöhen h_A und h_D durch die Ecken A und D eines Tetraeders* $[A,B,C,D]$ *schneiden sich genau dann, wenn sich die Raumhöhen h_B und h_C durch die Ecken B und C schneiden. qed*

Die nächste Folgerung ergibt sich auch fast unmittelbar, hat aber eine höhere Qualität.

Satz. *Ein Tetraeder ist genau dann orthozentrisch, wenn je zwei Gegenkanten zueinander orthogonal sind.*

Beweis. „⇒“: folgt unmittelbar aus dem Lemma.

„⇐“: Die Bedingung der Orthogonalität liefert mit Hilfe des Lemmas, dass sich je zwei der vier Raumhöhen schneiden. Da die Raumhöhen alle vier Ecken enthalten, also nicht in einer Ebene liegen, schneiden sie sich nach dem früher angegebenen Hilfssatz in einem Punkt. *qed*

Der nächste Satz beantwortet eine nahe liegende Frage.

Satz. *Die Raumhöhen eines orthozentrischen Simplexes schneiden sich im Monge-Punkt.*

Beweis. In einem orthozentrischen Simplex berechnen wir für den Schnittpunkt H der Raumhöhen:

$$(A_1 - A_0)\cdot \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k - A_1\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=2}^{n}(A_1 - A_0)A_k\right) = (A_1 - A_0)\cdot A_2 = (A_1 - A_0)\cdot H,$$

$$(A_i - A_0)\cdot \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k - A_i\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(A_i - A_0)A_k\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(A_i - A_0)A_1\right) =$$
$$= (A_i - A_0)A_1 = (A_i - A_0)H$$

für $i \in \{2,3,\dots,n\}$. Das sind aber genau die Gleichungen, die den Punkt von Monge definieren. *qed*

Weiter haben wir eine Art induktiver Charakterisierung der Orthozentrizität.

Satz. 1. *In einem orthozentrischen n-Simplex sind die Fußpunkte der Raumhöhen des Simplexes die Höhenschnittpunkte (Monge-Punkte) der zugehörigen (n-1)-dimensionalen Seiten.*
2. *Ist eine (n-1)-dimensionale Seite eines n-Simplexes orthozentrisch und ist ihr Höhenschnittpunkt der Fußpunkt der zugehörigen Raumhöhe des Simplexes, so ist das Simplex orthozentrisch.*

Beweis. 1. Das n-Simplex $\Delta = [A_0, A_1, \dots, A_n]$ sei orthozentrisch. O.B.d.A. betrachten wir die Raumhöhe durch die Ecke A_0 und bezeichnen ihren Fußpunkt mit H_0. Wir haben

$$(H_0 - A_j)\cdot(A_i - A_k) = 0$$

für alle $i, j, k \in \{1,2,\dots,n\}$ mit $i \neq j \neq k$ zu zeigen. Dazu berechnen wir

$$(H_0 - A_j)\cdot(A_i - A_k) = (H_0 - A_0 + A_0 - A_j)\cdot(A_i - A_k) =$$

$$= (H_0 - A_0)\cdot(A_i - A_k) + (A_0 - A_j)\cdot(A_i - A_k) = 0 + 0 = 0.$$

Der erste Summand verschwindet, weil der Vektor $H_0 - A_0$, der Richtungsvektor der Raumhöhe durch A_0, auf Vektoren senkrecht steht, die zur Gegenseite der Ecke A_0 gehören, der zweite aufgrund der Voraussetzung der Orthozentrizität.

2. O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Gegenfacette der Ecke A_0 des Simplexes $\Delta = [A_0, A_1, \dots, A_n]$ orthozentrisch und deren Höhenschnittpunkt H_0 der Fußpunkt der Raumhöhe durch die Ecke A_0 ist. Wir prüfen die Orthozentrizitätsbedingung, die besagt, dass je zwei

disjunkte Kanten zueinander orthogonal sind. Da die Gegenfacette der Ecke A_0 nach Voraussetzung orthozentrisch ist, gilt dies für je zwei disjunkte Kanten, die die Ecke A_0 nicht enthalten. Für $i, j, k \in \{1,2,\ldots,n\}$ mit $i \neq j \neq k$ berechnen wir

$$(A_0 - A_j)\cdot(A_i - A_k) = (A_0 - H_0 + H_0 - A_j)\cdot(A_i - A_k) =$$

$$= (A_0 - H_0)\cdot(A_i - A_k) + (H_0 - A_j)\cdot(A_i - A_k) = 0 + 0 = 0.$$

Jetzt verschwindet der erste Summand aus dem gleichen Grund wie im ersten Teil des Beweises, und der zweite, weil nun der Punkt H_0 nach Voraussetzung der Höhenschnittpunkt der Gegenfacette zur Ecke A_0 ist. *qed*

Für spätere Anwendungen bemerken wir noch, dass man die Bedingung für die Orthozentrizität eines Simplexes algebraisch auch in folgender Form schreiben kann:

$$A_i\cdot A_j + A_k\cdot A_l = A_i\cdot A_l + A_k\cdot A_j$$

für $\{i,k\}\cap\{j,l\} = \varnothing$. Sind die vier Indizes paarweise verschieden, so kann man in dieser Formel noch k mit l vertauschen und erhält die symmetrische Gleichungskette

$$A_i\cdot A_j + A_k\cdot A_l = A_i\cdot A_l + A_k\cdot A_j = A_i\cdot A_k + A_l\cdot A_j.$$

Es liegt nun nahe, den drei-dimensionalen Fall besonders zu untersuchen. Wir betrachten ein Tetraeder mit den früher eingeführten speziellen Bezeichnungen.

Satz. *Für das Tetraeder* $\Delta = [A,B,C,D]$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) *das Tetraeder ist orthozentrisch*;
(2) *je zwei Gegenkanten sind orthogonal*;
(3) *es gilt* $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$;
(4) die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der drei Gegenkantenpaare sind gleich lang.

Beweis. Die Äquivalenz (1) ⇔ (2) ist bereits allgemein für n-Simplizes bewiesen. Die Bedingung (3) lässt sich umschreiben zu

$$(C - B)^2 + (D - A)^2 = (A - C)^2 + (D - B)^2 = (B - A)^2 + (D - C)^2,$$

$$B\cdot C + A\cdot D = A\cdot C + B\cdot D = B\cdot A + C\cdot D.$$

Dies ist aber nach der obigen Bemerkung gerade die Bedingung dafür, dass je zwei Gegenkanten orthogonal sind.

Die Bedingung (4) besagt algebraisch

$$\left(\tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(C + D)\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}(A + C) - \tfrac{1}{2}(B + D)\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}(A + D) - \tfrac{1}{2}(B + C)\right)^2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$AB - AC - AD - BC - BD + CD = AC - AB - AD - BC - CD + BD =$$
$$= AD - AB - AC - BD - CD + BC.$$

Die erste diese Gleichungen (obere Zeile) ist äquivalent zu:

$$AB + CD = AC + BD,$$

die zweite (oben links = unten) zu:

$$AB + CD = AD + BC.$$

Beide Gleichungen zusammen sind wieder äquivalent zu der Bedingung für die Orthozentrizität des Tetraeders. *qed*

Zur weiteren Untersuchung der Eigenschaften der Raumhöhen entnehmen wir dem vorangehenden Beweis noch folgende Aussage.

Lemma. *Die Raumhöhen h_A und h_D durch die Ecken A und D eines Tetraeders* $[A,B,C,D]$ *schneiden sich genau dann, wenn gilt*: $b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$. *qed*

Folgerung. *Bestehen zwei Paare von Gegenkanten eines Tetraeders aus zueinander orthogonalen Kanten, so sind auch die Kanten des dritten Paares zueinander orthogonal.*

Beweis. Angenommen, die Paare (AB,CD) und (BC,AD) von Kanten des Tetraeders $[A,B,C,D]$ sind zueinander orthogonale Paare. Aus den früheren Lemmata folgt $b^2 + b'^2 = a^2 + a'^2$ und $b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$. Aus der Transitivität der Gleichheitsrelation folgt dann auch $a^2 + a'^2 = c^2 + c'^2$. Das ist die Orthogonalität des Paares (AC,BD). *qed*

Eine Übersicht über die Möglichkeiten gibt der folgende

Satz. *Für die Raumhöhen eines Tetraeders gilt eine der folgenden Aussagen:*

1. *Die Raumhöhen sind kopunktal, das Tetraeder ist orthozentrisch.*
2. *Zwei Raumhöhen schneiden sich, ebenso die beiden anderen; weitere Schnittpunkte existieren nicht.*
3. *Die Raumhöhen sind paarweise windschief.*

Beweis. Es ist nur noch auszuschließen, dass sich genau drei Raumhöhen paarweise schneiden. O.B.d.A. betrachten wir den Fall, dass sich die Raumhöhen h_A, h_B, h_C paarweise schneiden. Die Folgerung aus dem ersten Lemma liefert dann, dass sich sowohl die Raumhöhen h_C und h_D, als auch die Raumhöhen h_B und h_D, als auch die Raumhöhen h_A und h_D schneiden. Also schneiden sich die vier Raumhöhen paarweise und sind kopunktal. Das Tetraeder ist orthozentrisch. *qed*

Es stellt sich nun die Frage, ob der Monge-Punkt auch in den Fällen 2. und 3. des Vorangehenden Beziehungen zu den Raumhöhen eines Tetraeders hat.

Satz. *Es sei* $[A,B,C,D]$ *ein Tetraeder mit folgenden Eigenschaften*:
1. *zwei Raumhöhen schneiden sich in einem Punkt* H_1;
2. *die beiden anderen Raumhöhen schneiden sich in einem Punkt* H_2;
3. *die Punkte* H_1 *und* H_2 *sind verschieden*.

Dann ist der Monge-Punkt der Mittelpunkt der Strecke $[H_1,H_2]$.

Beweis. Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen und nehmen o.B.d.A. an, dass H_1 der Schnittpunkt von h_A und h_D, H_2 der Schnittpunkt von h_B und h_C ist. Der Monge-Punkt H_M ist bestimmt durch die Gleichungen

$$(B-A)H_M = ½\,(B-A)(C+D)$$
$$(C-A)H_M = ½\,(C-A)(B+D)$$
$$(D-A)H_M = ½\,(D-A)(B+C)$$

Wir berechnen für H_1 aus $(H_1-D)(B-A) = (H_1-D)(C-A) = (H_1-A)(D-C) = 0$:

$$(B-A)\,H_1 = (B-A)D,$$
$$(C-A)\,H_1 = (C-A)D,$$
$$(D-A)\,H_1 = (D-C)\,H_1 + (C-A)\,H_1 = (D-C)A + (C-A)D = (D-A)C$$

und für H_2 aus $(H_2-C)\,(B-A) = (H_2-B)\,(C-A) = (H_2-B)\,(D-A) = 0$:

$$(B-A)\,H_2 = (B-A)C,$$
$$(C-A)\,H_2 = (C-A)B,$$
$$(D-A)\,H_2 = (D-A)B.$$

Damit erfüllt der Mittelpunkt $½(H_1+H_2)$ der Strecke $[H_1,H_2]$ die Bedingungsgleichungen für den Punkt von Monge. *qed*

Aber auch im Falle von paarweise windschiefen Raumhöhen hat der Punkt von Monge eine besondere Bedeutung in Bezug auf die Raumhöhen.

Satz. *Sind die vier Raumhöhen eines Tetraeders paarweise windschief, so liegen sie auf einem gleichseitigen*[1] *einschaligen Hyperboloid, dessen Mittelpunkt der Punkt von Monge ist.*

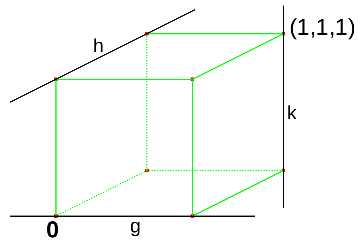
Der Beweis erfordert einige Vorbereitungen.

Hilfssatz. *Drei gegebene, paarweise windschiefe Geraden liegen auf einer Quadrik; sie ist die disjunkte Vereinigung aller Geraden, die alle drei gegebenen Geraden eigentlich oder uneigentlich schneiden. Es handelt sich*

[1] Ein einschaliges Hyperboloid heißt *gleichseitig*, wenn die Spur der zugehörigen Matrix verschwindet.

1. *um ein einschaliges Hyperboloid, wenn die Richtungsvektoren der gegebenen Geraden linear unabhängig sind, und*
2. *um ein hyperbolisches Paraboloid, wenn die Richtungsvektoren der gegebenen Geraden linear abhängig sind.*

Beweis. Wir betrachten zunächst einen Spezialfall:



Gegeben seien die Geraden

$$g = \{(t,0,0) \mid t \in \mathbb{R}\},\ h = \{(0,t,1) \mid t \in \mathbb{R}\},\ k = \{(1,1,t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Für die Gleichung der gesuchten Quadrik q machen wir den allgemeinen Ansatz

$$q : \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta xz + \varepsilon yz + \zeta z^2 + \eta x + \theta y + \iota z + \kappa = 0.$$

Die Forderung $g \subset q$ impliziert:

$$\alpha t^2 + \eta t + \kappa = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da eine quadratische Gleichung höchstens zwei Lösungen hat, ist dies nur möglich für

$$\alpha = \eta = \kappa = 0.$$

Die Forderung $h \subset q$ impliziert weiter:

$$\gamma t^2 + \varepsilon t + \zeta + \theta t + \iota = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

woraus folgt:

$$\gamma = \varepsilon + \theta = \zeta + \iota = 0.$$

Die Gleichung der Quadrik q erhält damit die Form:

$$\beta xy + \delta xz + \varepsilon yz + \zeta z^2 - \varepsilon y - \zeta z = 0.$$

Schließlich soll $k \subset q$ gelten:

$$\beta + \delta t + \varepsilon t + \zeta t^2 - \varepsilon - \zeta t = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

was

$$\zeta = \varepsilon + \delta = \beta - \varepsilon = 0$$

zur Folge hat. Damit erhält die Gleichung die Form

$$\varepsilon xy - \varepsilon xz + \varepsilon yz - \varepsilon y = 0.$$

Dies ist nur für $\varepsilon \neq 0$ die Gleichung einer Quadrik, die sich dann vereinfacht in der Form

$$xy - xz + yz - y = 0$$

schreiben lässt. Wir haben damit eine notwendige Bedingung für die Existenz der gesuchten Quadrik. Da die Koordinaten der Punkte aus $g \cup h \cup k$ die Gleichung erfüllen, ist diese Bedingung auch hinreichend und die Quadrik ist eindeutig bestimmt.

Wir zeigen nun, dass jeder Punkt der Quadrik q auf einer Geraden liegt, die alle drei Geraden g, h und k schneidet. Zunächst betrachten wir die Punkte mit $y = z \neq 0$. Setzen wir $z = y$ in der Gleichung der Quadrik q, so erhalten wir $y^2 - y = 0$. Wegen $y \neq 0$ folgt $y = z = 1$. Damit handelt es sich um die Punkte der Geraden $g' = \{(t,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$, die ganz in der Quadrik liegt, parallel zur Geraden g ist, also die Gerade g uneigentlich, sowie die Geraden h und k in den Punkten (0,1,1) beziehungsweise (1,1,1) schneidet. Als nächstes sehen wir uns die Punkte $(x,y,z) \in q$ mit $y \neq z$ an, für die gilt:

$$x = \frac{y(1-z)}{y-z}.$$

Diese Punkte haben eine eindeutige Darstellung der Form

$$(x,y,z) = (t(1 + s(1-t)),st,s(t-1)) = (t,0,0) + s(t(1-t),t,\ t-1).$$

Das Gleichungssystem für die Unbekannten s und t

$$\begin{aligned} x &= t(1 + s(1-t)) \\ y &= st \\ z &= s(t-1) \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $s = y - z$, $t = \dfrac{y}{y-z}$. Damit liegt der Punkt (x,y,z) in der Geraden mit dem Aufpunkt $(t,0,0)$ und dem Richtungsvektor $(t(1-t),t,\ t-1)$, die eindeutig bestimmt und in der Quadrik q enthalten ist.

- Im Fall $t = 0$ handelt es sich um die Gerade k', die parallel zur Geraden k ist, also die Gerade k uneigentlich, sowie die Geraden g und h für den Parameter $s = 0$ im

Aufpunkt (0,0,0) beziehungsweise für den Parameter s = -1 im Punkt (0,0,1) schneidet.

- Im Fall $t = 1$ handelt es sich um die Gerade h', die parallel zur Geraden h ist, also die Gerade h uneigentlich, sowie die Geraden g und k für den Parameter $s = 0$ im Aufpunkt (1,0,0) beziehungsweise für den Parameter $s = 1$ im Punkt (1,1,0) schneidet.
- Im Fall $t \neq 0, 1$ schneidet diese Gerade die Gerade g im Aufpunkt, die Gerade h für den Parameter $s = \frac{1}{t-1}$ im Punkt $\left(0, \frac{t}{t-1}, 1\right)$ und die Gerade k für den Parameter $s = \frac{1}{t}$ im Punkt $\left(1, 1, \frac{1}{t}\right)$.

Für spätere Anwendung halten wir noch fest, dass je drei dieser Geraden linear unabhängige Richtungsvektoren haben. Das ergibt sich aus der folgenden Rechnung

$$\det\begin{pmatrix} t_1(1-t_1) & t_1 & t_1-1 \\ t_2(1-t_2) & t_2 & t_2-1 \\ t_3(1-t_3) & t_3 & t_3-1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} = (t_1-t_2)\,(t_1-t_3)\,(t_2-t_3) \neq 0$$

für paarweise verschiedene Werte t_1, t_2, t_3 (Vandermondesche Determinante), und

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_2(1-t_2) & t_2 & t_2-1 \\ t_3(1-t_3) & t_3 & t_3-1 \end{pmatrix} = t_3 - t_2 \neq 0$$

für $t_2 \neq t_3$.

Den Typ der Quadrik q bestimmen wir nach dem Standardverfahren. Zunächst schreiben wir die Gleichung nach Multiplikation mit 2 in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Da die Matrix $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, handelt es sich um eine Mittelpunktsquadrik, deren Mittelpunkt sich nach der Formel $-\frac{1}{2}\,\mathcal{M}^{-1}b$ mit $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen lässt. Von der optischen Lage der drei Geraden machen wir für den Mittelpunkt den Ansatz (½,½,½) und verschieben den Ursprung des Koordinatensystems dorthin. Dann ergibt sich die Gleichung

$$(x + ½)(y + ½) – (x + ½)(z + ½) + (y + ½)(z + ½) – (y + ½) = xy – xz + yz – ¼ = 0.$$

Zur Hauptachsentransformation sind die Eigenwerte der Matrix zu $\mathcal{M}$ bestimmen. Das charakteristische Polynom ist $– t^3 + 3t – 2$. Wir erraten die Wurzeln 1 und -2; aus dem Satz von Vieta ergibt sich dann 1 als dritte Wurzel. Damit haben wir für die Quadrik q die Gleichung $x^2 + y^2 – 2z^2 = ¼$; also handelt es sich um ein gleichseitiges (Rotations-) Hyperboloid. Wir bestimmen noch die Hauptachsen, das heißt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Die Richtung der Drehachse wird durch einen Eigenvektor zum Eigenwert -2 beschrieben, eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Auch jetzt empfiehlt es sich, statt zu rechnen, eine Lösung mit Hilfe von optischen Überlegungen zu erraten. Von den acht Ecken des früher gezeigten Würfels liegen 6 auf dem Hyperboloid. Dann sollte die Verbindungsgerade der beiden übrigen Ecken die gesuchte Drehachse sein. Ein Richtungsvektor ist (1,-1,1) und dies ist tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems. Dieser Vektor ist nun leicht zu normieren und zu einer Orthonormalbasis zu ergänzen.

Nun betrachten wir den Fall von drei beliebigen paarweise windschiefen Geraden g^*, h^*, k^* mit linear unabhängigen Richtungsvektoren und konstruieren eine Affinität, die diese Geraden in die Geraden g, h, k überführt. Dazu beginnen wir mit Parameterdarstellungen

$$g^* : A_1 + rU_1,\ \ h^* : B_1 + sV_1,\ \ k^* : C_1 + tW_1,$$

die wir noch spezifizieren werden. Nach Voraussetzung sind die Richtungsvektoren U_1, V_1, W_1 linear unabhängig, bilden also eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten nun die Ebene, die die Gerade h^* enthält und parallel zu der Geraden k^* ist; sie hat die Parameterdarstellung $B_1 + sV_1 + tW_1$. Diese Ebene schneiden wir mit der Geraden g^*:

$$A_1 + rU_1 = B_1 + sV_1 + tW_1.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu der Gleichung

$$rU_1 – sV_1 – tW_1 = B_1 – A_1.$$

Da wir eine Basis haben, gibt es genau ein Tripel r, s, t, das die Gleichung erfüllt, also genau einen Durchstoßpunkt. Da wir den Aufpunkt der Geraden g* beliebig wählen können, können wir o.B.d.A. annehmen, dass dieser Durchstoßpunkt der Aufpunkt ist, also $r = 0$ gilt. Ebenso können wir den Aufpunkt der Geraden h^* verschieben und $s = 0$ annehmen. Damit haben wir $A_1 = B_1 + tW_1$. Da A_1 sicherlich von B_1 verschieden ist, muss $t \neq 0$ gelten; da der Richtungsvektors einer Geraden nur bis auf einen skalaren Faktor ungleich 0 bestimmt ist, können wir also weiterhin $t = -1$ annehmen und erhalten $B_1 = A_1 + W_1$.

Als nächstes schneiden wir die Ebene, die die Gerade g^* enthält und parallel zu der Geraden h^* ist, mit der Geraden k^*:

$$C_1 + tW_1 = A_1 + rU_1 + sV_1.$$

Wieder gibt es genau ein Tripel r, s, t, das die Gleichung erfüllt, also genau einen Durchstoßpunkt. Die freie Wählbarkeit eines Aufpunktes für die Gerade k^* erlaubt die Annahme $t = 0$. Da der Punkt C_1 nicht auf der Geraden g^* liegt, ist sicherlich $s \neq 0$ und wir können $s = 1$ annehmen. Damit erhalten wir $C_1 = A_1 + rU_1 + V_1 = B_1 - W_1 + rU_1 + V_1$. Wäre $r = 0$, so würde gelten $C_1 + W_1 = B_1 + V_1$ und wir hätten einen Schnittpunkt von k^* und h^*. Also muss auch r $\neq 0$ sein; wir können $r = s = 1$ annehmen.

Nun fassen wir die Richtungsvektoren der Geraden g^*, h^*, k^* als Spaltenvektoren auf und bilden wir die Matrix $\Phi = (U_1,V_1,W_1)$. Damit definieren wir die Affinität $\varphi: X \mapsto \Phi X + A_1$, die die Geraden g, h, k auf die Geraden g^*, h^*, k^* abbildet. Ein Punkt X' liegt im Bild der Quadrik q, wenn sein Urbild $\Phi^{-1}(X' - A1)$ in der Quadrik q liegt, also wenn gilt:

$$(\Phi^{-1}(X' - A1))^{t}\, \mathcal{M}\, \Phi^{-1}(X' - A1) + b^{t}\Phi^{-1}(X' - A1) = 0,$$

das heißt, das Bild der Quadrik q ist eine Quadrik q^* mit der Matrix $(\Phi^{-1})^{t}\mathcal{M}\Phi^{-1}$ und enthält die Geraden g^*, h^*, k^*. Umgekehrt ist das Urbild jeder Quadrik, die diese Geraden enthält, eine Quadrik, die die Geraden g, h, k enthält, also die eindeutig bestimmte Quadrik q; damit ist auch die Quadrik q^* die einzige Quadrik, die die Geraden g^*, h^*, k^* enthält. Jede Gerade, die die Geraden g, h, k schneidet, wird durch die Affinität φ auf eine Gerade abgebildet, die Geraden g^*, h^*, k^* schneidet; das Analoge gilt für die inverse Affinität. Damit ist die Quadrik q^* auch die disjunkte Vereinigung aller Geraden, die alle drei Geraden g^*, h^*, k^* eigentlich oder uneigentlich schneiden und je drei solche Geraden haben linear unabhängige Richtungsvektoren. Ein Richtungsvektor des Bildes einer Geraden mit Aufpunkt A und Richtungsvektor U ergibt sich ja durch die Rechnung

$$\varphi(A + U) - \varphi(A) = \Phi(A + U) + A_1 - \Phi A - A_1 = \Phi U.$$

Sind also U, V, W linear unabhängige Richtungsvektoren, so gilt (bei der Auffassung als Spaltenvektoren):

$$\det(\Phi U, \Phi V, \Phi W) = \det(\Phi(U,V,W)) = \det\Phi \cdot \det(U,V,W) \neq 0.$$

Damit ist der erste Fall erledigt. Nun ist der Fall von drei paarweise windschiefen Geraden mit linear abhängigen Richtungsvektoren zu betrachten. Wir beginnen wieder mit einem Spezialfall, mit den Geraden

$$g = \{(t,0,0) \mid t \in \mathbb{R}\},\ h = \{(0,t,1) \mid t \in \mathbb{R}\},\ k = \{(\mathrm{t},\mathrm{t},p) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

mit $p \neq 0, 1$. Die Richtungsvektoren sind die Einheitsvektoren $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ sowie der Vektor $e_1 + e_2$. Der allgemeine Ansatz für die Gleichung einer Quadrik q, die diese drei Geraden enthält, lässt sich wie im ersten Fall aufgrund von $g, h \subset q$ reduzieren auf die Gleichung

$$\beta xy + \delta xz + \varepsilon yz + \zeta z^2 - \varepsilon y - \zeta z = 0.$$

Die Forderung $k \subset q$ bedeutet nun

$$\beta t^2 + ((\delta + \varepsilon)p - \varepsilon)t + \zeta p(p-1) = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

was $\beta = \zeta = 0$ und $\delta = \varepsilon \dfrac{1-p}{p}$ erzwingt. Das führt auf die Gleichung

$$(1-p)xz + pyz - py = 0.$$

Da die Punkte der Geraden g, h, k diese Gleichung erfüllen, haben wir tatsächlich die Gleichung einer eindeutig bestimmten Quadrik q, die diese Geraden enthält. Jeder Punkt (x,y,z) dieser Quadrik hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$(x,y,z) = \left(t(1-r), tr\frac{1-p}{p}, r\right) = (t,0,0) + r\left(-t, t\frac{1-p}{p}, 1\right).$$

Es gilt $r = z$ und $t = \dfrac{x}{1-z}$ für $z \neq 1$, beziehungsweise $t = \dfrac{py}{1-p}$ für $z = 1$. Der betrachtete Punkt liegt also auf der ganz in der Quadrik q enthaltenen Geraden mit dem Aufpunkt $(t,0,0) \in g$ und dem Richtungsvektor $\left(-t, t\dfrac{1-p}{p}, 1\right)$, die die Gerade h für den Parameter $r = 1$ im Punkt $\left(0, t\dfrac{1-p}{p}, 1\right)$ und die Gerade k für den Parameter p im Punkt $(t(1-p), t(1-p),p)$ schneidet. Die Richtungsvektoren von je zwei dieser Geraden sind linear unabhängig, von je drei linear abhängig: Offensichtlich verschwindet die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} -t_1 & -t_2 & -t_3 \\ t_1\dfrac{1-p}{p} & t_2\dfrac{1-p}{p} & t_3\dfrac{1-p}{p} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun geht es um den Typ dieser Quadrik q. Die Matrixdarstellung ist

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 .$$

Jetzt ist die Matrix $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar. Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems berechnet man leicht die Eigenwerte 0, $\pm\sqrt{2p^2-2p+1}$ und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, die man in der Transformationsmatrix T für die Hauptachsentransformation zusammenfassen kann:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{p}{\sqrt{2p^2-2p+1}} & \frac{(1-p)\sqrt{2}}{2\sqrt{2p^2-2p+1}} & \frac{(p-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2p^2-2p+1}} \\ \frac{p-1}{\sqrt{2p^2-2p+1}} & \frac{p\sqrt{2}}{2\sqrt{2p^2-2p+1}} & \frac{-p\sqrt{2}}{\sqrt{2p^2-2p+1}} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

man beachte, dass der Term unter der Wurzel, $2p^2 - 2p + 1 = p^2 + (p-1)^2$, nur positive Werte annimmt. Die Drehung des Koordinatensystems mit der Matrix T liefert für die Quadrik q die Gleichung

$$X^{\mathbf{t}}T^{\mathbf{t}}\,\mathcal{M}TX + b^{\mathbf{t}}TX = 0,$$

das heißt explizit, nach Division durch $\sqrt{2p^2-2p+1}$,

$$y^2 - z^2 + \frac{2p(p+1)}{2p^2-2p+1}x - \frac{p^2\sqrt{2}}{2p^2-2p+1}y + \frac{p^2\sqrt{2}}{2p^2-2p+1}z = 0 .$$

Das ist die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids mit dem Sattelpunkt

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{p^2\sqrt{2}}{2(2p^2-2p+1)} & \frac{p^2\sqrt{2}}{2(2p^2-2p+1)} \end{pmatrix}.$$

Verschiebt man noch den Ursprung in den Sattelpunkt, so erhält die Gleichung der Quadrik die Form:

$$y^2 - z^2 + \frac{2p(p+1)}{2p^2-2p+1}x = 0.$$

Im ursprünglichen Koordinatensystem hat der Sattelpunkt die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p^2}{2p^2-2p+1} \end{pmatrix};$$

er liegt also auf der ganz in der Quadrik q enthaltenen z-Achse. Es gibt noch eine zweite Gerade durch den Sattelpunkt, die ganz in der Quadrik q enthalten ist; sie hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \end{pmatrix}$.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall, drei paarweise windschiefe Geraden mit linear abhängigen Richtungsvektoren, den wir wieder auf den Spezialfall zurückführen werden. Die Geraden seien wieder in Parameterform gegeben

$$g^* : A^* + rU,\ \ h^* : B^* + sV,\ \ k^* : C^* + t(U+V).$$

Zunächst geht es darum, eine Gerade zu finden, die alle diese drei Geraden schneidet. Dazu bemerken wir als erstes, dass die Vektoren $B^* - A^*$, U, V linear unabhängig sind. Da die Geraden g^* und h^* windschief sind, sind die Vektoren U und V linear unabhängig. Wäre $p(B^* - A^*) + rU + sV = 0$ mit $(p,r,s) \neq (0,0,0)$, so kann der Koeffizient p wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren U und V nicht verschwinden; also kann $p = 1$ angenommen werden. Dann lässt sich die Gleichung umformen zu

$$B^* + sV = A^* - rU$$

und wir hätten einen Schnittpunkt der Geraden g^* und h^* im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nun betrachten wir die von dem Punkt A^* und der Geraden h^* aufgespannte Ebene; wir schneiden sie mit der Geraden k*:

$$A^* + p(B^* - A^*) + sV = C^* + t(U+V).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $B^* - A^*$, U, V gibt es genau ein Tripel p, s, t, das die Gleichung löst, also genau einen Durchstoßpunkt. Wir können annehmen, dass dies der Aufpunkt der Geraden k^* ist, also $t = 0$ gilt. Wäre $p = 0$, so hätte die Gerade k^* die Parameterdarstellung $C^* + t(U+V) = A^* + sV + t(U+V)$, also für den Parameter $t = -s$ einen Schnittpunkt mit der Geraden g^*. Also ist $p \neq 0$ und der Vektor $C^* - A^* = p(B^* - A^*) + sV$ ist linear unabhängig von dem Richtungsvektor V. Damit kann die Gerade A^*C^* nicht parallel zu der Geraden h^* sein; sie liegt ganz in der betrachteten Ebene, die auch die Gerade h^* enthält, hat also genau einen Schnittpunkt mit der Geraden h^*, den wir als Aufpunkt für die Gerade h^* wählen können. Dann ist auch $s = 0$. Also haben wir

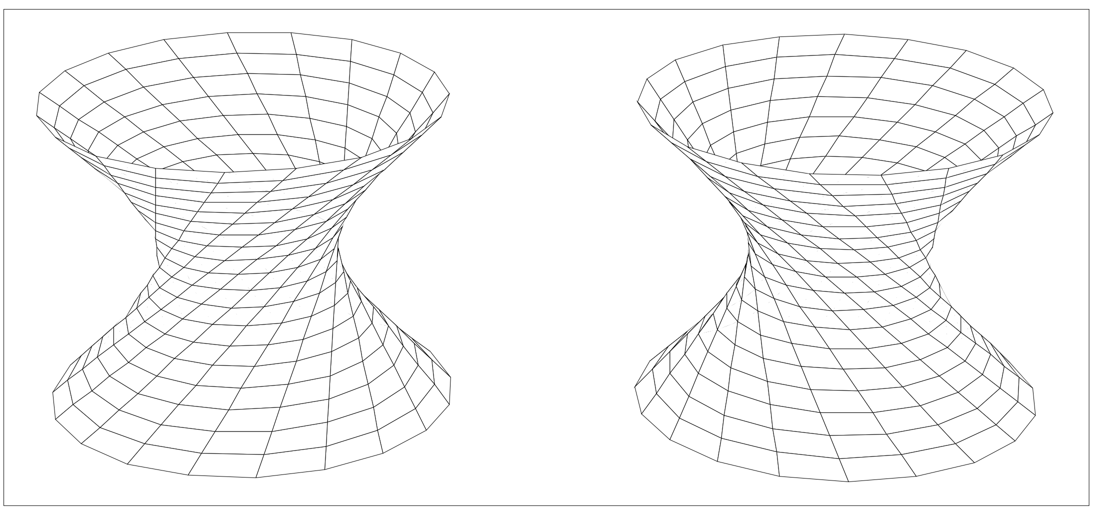
$$C^* = A^* + p(B^* - A^*).$$

Die Affinität mit der Matrix $(U,V,B^* - A^*)$ und dem Verschiebungsvektor A^* bildet die Geraden g, h, k auf die Geraden g^*, h^*, k^* ab und ermöglicht die Zurückführung des allgemeinen Falles auf den Spezialfall. *qed*

Den Fall des einschaligen Hyperboloids müssen wir noch etwas genauer studieren, sozusagen die Umkehrung der Aussagen des vorigen Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Ein einschaliges Hyperboloid enthält zwei einparametrige Scharen von Geraden mit folgenden Eigenschaften*:

1. *Die Geraden einer Schar sind paarweise windschief und je drei von ihnen haben linear unabhängige Richtungsvektoren*.
2. *Jede Gerade der einen Schar schneidet jede Gerade der anderen Schar in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkt*.
3. *Jede Gerade der einen Schar ist parallel zu einer Geraden der anderen Schar, die jeweilige Mittelparallele geht durch den Mittelpunkt des Hyperboloids und ist eine Asymptote*.
4. *Jeder Punkt des Hyperboloids ist in genau einer Geraden jeder Schar enthalten*.



Die Geraden, die ganz in einem einschaligen Hyperboloid enthalten sind, heißen *Mantellinien* des Hyperboloids. Die Mittelparallelen zu je zwei parallelen Mantellinien bilden den *Asymptotenkegel*.

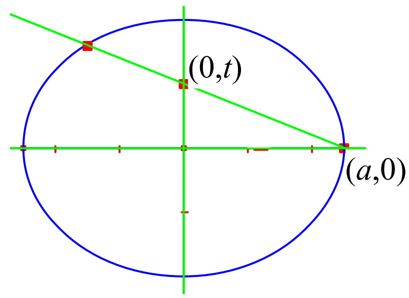
Beweis. Zu einem gegebenen einschaligen Hyperboloid wählen wir ein Koordinatensystem so, dass die Gleichung des Hyperboloids die euklidische Normalform erhält:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Zuerst bestimmen wir eine Parameterdarstellung der durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\ z=0$$

beschriebenen *Kehlellipse* des Hyperboloids. Dazu arbeiten wir in der (x,y)-Ebene. Als Parameter t dienen die Punkte $(0,t)$ der y-Achse. Einen von $(a,0)$ verschiedenen Punkt der Ellipse nehmen wir als den zweiten Schnittpunkt der Ellipse und der Geraden mit den Achsenabschnitten $(a,0)$ und $(0,t)$.



Die Gerade hat die Gleichung $y=-\dfrac{t}{a}x+t$. Eingesetzt in die Ellipsengleichung ergibt sich

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{t^2x^2}{a^2b^2}-\frac{2t^2x}{ab^2}+\frac{t^2}{b^2}-1=\frac{1}{a^2b^2}\Big((b^2+t^2)x^2-2at^2x+a^2(t^2-b^2)\Big)=0.$$

Diese quadratische Gleichung für x hat offensichtlich eine Lösung a, die zu dem Schnittpunkt $(a,0)$ gehört. Nach dem Satz von Vieta ist dann die zweite Lösung $a\dfrac{t^2-b^2}{t^2+b^2}$. Also ist

$$t\mapsto\left(a\frac{t^2-b^2}{t^2+b^2},2b^2\frac{t}{t^2+b^2}\right)=A_t$$

eine rationale Parameterdarstellung der Ellipse. Der Punkt $(a,0)$ wird für den Parameter $t=\infty$ angenommen. Wir bemerken noch, dass der dem Punkt A_t diametral gegenüberliegende Punkt zum Parameter $-\dfrac{b^2}{t}$ gehört.

Die Punkte der Kehlellipse nehmen wir nun als Aufpunkte der gesuchten Geraden. Keine solche Gerade ist parallel zur (x,y)-Ebene, da die zu dieser Ebene parallelen Ebenen das Hyperboloid in zur Kehlellipse ähnlichen Ellipsen schneiden. Also haben die gesuchten Geraden Richtungsvektoren (u,v,w) mit $w\neq 0$; wir können zunächst $w=1$ annehmen. Die Gerade mit der Parameterdarstellung

$$A_t + r(u \quad v \quad 1) = \left(\frac{t^2 - b^2}{t^2 + b^2} a + ru \quad \frac{2b^2 t}{t^2 + b^2} + rv \quad r \right)$$

soll ganz in dem Hyperboloid liegen. Durch Einsetzen in die Gleichung des Hyperboloids ergibt sich die Bedingung

$$(b^2 + t^2)(a^2 b^2 - c^2(a^2 v^2 + b^2 u^2))r - 2\, ab^2 c^2((t^2 - b^2)u + 2\, atv) = 0 \text{ für alle } r \in \mathbb{R}.$$

Damit müssen die Koeffizienten u und v die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$a^2 b^2 - c^2(a^2 v^2 + b^2 u^2) = 0,\ (t^2 - b^2)u + 2\, atv.$$

Diese beiden Gleichungen liefern einen eindeutigen Wert:

$$u^2 = \frac{4a^2 b^2 t^2}{c^2 (t^2 + b^2)^2}.$$

Damit haben wir zwei mögliche Richtungsvektoren

$$K = \left(\frac{2abt}{c(t^2 + b^2)} \quad \frac{b(b^2 - t^2)}{c(t^2 + b^2)} \quad 1 \right) = \left(\frac{ay_0}{bc} \quad -\frac{bx_0}{ac} \quad 1 \right),$$

$$L = \left(\frac{-2abt}{c(t^2 + b^2)} \quad \frac{b(t^2 - b^2)}{c(t^2 + b^2)} \quad 1 \right) = \left(-\frac{ay_0}{bc} \quad \frac{bx_0}{ac} \quad 1 \right),$$

oder, nennerfrei geschrieben:

$$K_t = \left(2abt \quad b(b^2 - t^2) \quad c(t^2 + b^2)\right),\ \ L_t = \left(-2abt \quad b(t^2 - b^2) \quad c(t^2 + b^2)\right).$$

Die Geraden mit der Parameterdarstellung $A_t + r\, K_t$ bilden nun die eine der gesuchten Geradenscharen, die *K-Schar*, die Geraden mit der Parameterdarstellung $A_t + r\, L_t$ die andere Schar, die *L-Schar*.

Im Spezialfall $t = \infty$ erhalten wir die Richtungsvektoren $K_\infty = (0 \quad -b \quad c)$ und $L_\infty = (0 \quad b \quad c)$ sowie die Schargeraden $A_\infty + r\, K_\infty = (a \quad -br \quad cr)$ beziehungsweise $A_\infty + r\, L_\infty = (a \quad br \quad cr)$.

1. Zum Nachweis, dass die Geraden jeder Schar paarweise windschief sind, verwenden wir zunächst bequemer die Form der Richtungsvektoren ohne Parameterdarstellung für die Punkte der Kehlellipse. Wir untersuchen die Geraden

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 \end{pmatrix} + r_0\begin{pmatrix} \frac{ay_0}{bc} & -\frac{bx_0}{ac} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + r_0\frac{ay_0}{bc} & y_0 - r_0\frac{bx_0}{ac} & r_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix} \frac{ay_1}{bc} & -\frac{bx_1}{ac} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + r_1\frac{ay_1}{bc} & y_1 - r_1\frac{bx_1}{ac} & r_1 \end{pmatrix}$$

der K-Schar auf gemeinsame Punkte. Offensichtlich muss $r_0 = r_1$ sein. Setzen wir dafür einfach r, so haben wir die Gleichungen

$$bcx_0 + ray_0 = bcx_1 + ray_1,$$

$$acy_0 + rbx_0 = acy_1 + rbx_1.$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit c, der zweiten mit $-r$ und Addition ergibt

$$b(c^2 - r^2)x_0 = b(c^2 - r^2)x_1,$$

also $x_0 = x_1$ und damit auch $y_0 = y_1$. Damit fallen die beiden Geraden zusammen, zwei verschiedene haben keinen Punkt gemeinsam. Ebenso haben zwei verschiedene Geraden der L-Schar keinen Punkt gemeinsam. Dass sie auch nicht parallel sein können, ergibt sich mit aus der folgenden Überlegung.

Bilden wir aus den Vektoren K_t zu drei paarweise verschiedenen Parameterwerten t eine quadratische Matrix, so ist deren Determinante wieder bis auf einen Faktor eine Vandermondesche Determinante. Also sind diese Vektoren linear unabhängig. Dasselbe gilt für drei Vektoren L_t zu drei paarweise verschiedenen Parameterwerten.

2. und 3. Die Geraden $A_t + r\,K_t$ und $A_{t'} + r'\,L_{t'}$ schneiden sich im Punkt

$$\begin{pmatrix} a\frac{tt'-b^2}{tt'+b^2} & b^2\frac{t+t'}{tt'+b^2} & bc\frac{t-t'}{tt'+b^2} \end{pmatrix},$$

zu dem Parameterwerte

$$r = b\frac{t'-t}{(b^2+t^2)(b^2+tt')},\quad r' = b\frac{t'-t}{(b^2+t'^2)(b^2+tt')}$$

gehören. Für $t = \infty$ haben wir den Schnittpunkt $\begin{pmatrix} a & \frac{b^2}{t'} & \frac{-bc}{t'} \end{pmatrix}$, für $t' = \infty$ den Schnitt-

punkt $\begin{pmatrix} a & \frac{b^2}{t} & \frac{bc}{t} \end{pmatrix}$.

Im Fall $b^2 + tt' = 0$ liegen, wie am Anfang des Beweises bemerkt, die Aufpunkte A_t und $A_{t'}$ einander diametral gegenüber. Die entsprechenden Schargeraden sind parallel und der Mittelpunkt des Hyperboloids liegt auf der Mittelparallelen.

Zur Feststellung der Asymptoteneigenschaft betrachten wir die durch die Abbildung $(x,y,z) \mapsto \langle x,y,z,1\rangle$ gegebene Einbettung des dreidimensionalen affinen (reellen) Raumes in den dreidimensionalen projektiven Raum; mit $\langle x,y,z,1\rangle$ wird dabei der durch den Vektor $(x,y,z,1)$ erzeugte eindimensionale Untervektorraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^4$ bezeichnet. Im projektiven Raum wird das Hyperboloid durch die homogene Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = w^2$$

beschrieben. Eine Mittelparallele der betrachteten Art hat die Parameterdarstellung rK_t. Im projektiven Raum handelt es sich um die Punkte

$$\langle 2abrt, br(b^2 - t^2), cr(t^2 + b^2), s\rangle,$$

wobei r und s nicht gleichzeitig Null sind; der uneigentliche Punkt ist durch $s = 0$, $r \neq 0$ (sonst beliebig) gegeben. Setzt man die Koordinaten in die Gleichung des Hyperboloids ein, so ergibt sich $0 = s^2$. Also ist $s = 0$ eine doppelte Nullstelle, die Gerade berührt das Hyperboloid im Unendlichen und ist damit eine Asymptote.

4. folgt irgendwie aus dem vorigen Hilfssatz, kann aber auch direkt bewiesen werden: Ein Punkt $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ des Hyperboloids soll eine eindeutige Darstellung der Form

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = A_t + r\,K_t$$

beziehungsweise der Form

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = A_t + r\,L_t$$

besitzen. Das erste Gleichungssystem führt zunächst auf

$$r = \frac{z}{c(t^2 + b^2)}$$

und dann auf die beiden folgenden Gleichungen für t:

$$c(a - x)t^2 + 2abzt - b^2c(a + x) = 0,$$

$$(-bz - yc)t^2 + 2b^2ct + b^2(bz - yc) = 0.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $x = a$. Dann folgt aus der Gleichung des Hyperboloids $cy = \pm bz$. Im Fall $cy = -bz$ liegt der Punkt auf der Schargeraden $A_\infty + r K_\infty$ mit $r = \frac{z}{c}$. Im Fall $cy = bz$, $z \neq 0$ werden die Gleichungen erfüllt von den Parametern $t = \frac{bc}{z}$ und $r = \frac{z^3}{b^2 c(z^2 + c^2)}$.

Nun sei $x \neq a$. Dann hat die erste der beiden Gleichungen für t die Lösungen $\frac{a(bz \pm cy)}{c(x-a)}$. Nur die Lösung $t = \frac{a(bz - cy)}{c(x-a)}$ erfüllt jedoch auch die zweite Gleichung. Damit ist der Parameter t eindeutig bestimmt, aber auch der Parameter r. *qed*

Wir machen nun einen Abstecher in die ebene Geometrie. Eine ebene reelle Quadrik mit der Gleichung

$$q\colon \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0,$$

– in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \zeta = 0 \; –$$

ist eine *Hyperbel*, wenn die Determinante der Matrix negativ ist, wenn also gilt $\alpha\gamma < \beta^2$. Mit Hilfe einer Hauptachsentransformation und Ursprungsverschiebung erhält man eine der euklidischen Normalformen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

mit $a, b > 0$.Im zweiten Fall zerfällt das Polynom in die Form $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$; wir haben zwei sich im Ursprung schneidende Geraden. Die Geraden dieser Form sind im ersten Fall die *Asymptoten* der Hyperbel, sie berühren die Hyperbel im Unendlichen. In homogenen Koordinaten hat man

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \text{ beziehungsweise } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Setzt man die Geradengleichung in die Hyperbelgleichung ein, so erhält man $z^2 = 0$, also eine doppelte Wurzel: Die erste Gerade berührt die Hyperbel im uneigentlichen Punkt (a,-b,0), die zweite im Punkt (a,b,0).

Hat man vier Punkte, so liefert das Einsetzen in die allgemeine Gleichung einer Quadrik vier homogene lineare Gleichungen für die sechs Koeffizienten α, β, γ, δ, ε, ζ. Im allgemeinen Fall ist die Lösungsmenge ein zwei-dimensionaler Vektorraum, ein ein-dimensionaler projektiver Raum; jede Quadrik durch diese vier Punkte lässt sich als nicht verschwindende Linearkombination von zwei unabhängigen Quadriken schreiben. Damit bilden die Quadriken ein *Kegelschnittbüschel*. Der allgemeine Fall liegt genau dann vor, wenn die vier Punkte paarweise verschieden und nicht kollinear sind.

Eine Hyperbel heißt gleichseitig, wenn die Spur der Matrix verschwindet, das heißt wenn für die allgemeinen Koeffizienten gilt $\gamma = -\alpha$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Für die euklidische Normalform bedeutet dies $a = b$. Die Asymptoten haben die Steigungen $\pm b/a$. Das Produkt der Steigungen $-b^2/a^2$ ist genau dann gleich -1, wenn $a = b$ ist. Also stehen die Asymptoten genau dann senkrecht aufeinander, wenn die Hyperbel gleichseitig ist. Wir benötigen den folgenden

Hilfssatz. *Jeder Kegelschnitt durch die Ecken und den Höhenschnittpunkt eines nicht-reckwinkligen Dreiecks ist eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkt auf dem Feuerbachschen Kreis des Dreiecks.*

Beweis. Eine Seite des Dreiecks steht senkrecht auf der zugehörigen Höhe. Damit bilden die Paare aus Seite und Höhe gleichseitige Hyperbeln, die die Ecken des Dreiecks und den Höhenschnittpunkt enthalten. Damit ist jeder Kegelschnitt durch diese vier Punkte eine Linearkombination von gleichseitigen Hyperbeln, also selbst eine gleichseitige Hyperbel.

Zum Nachweis der Aussage über den Mittelpunkt dieser Hyperbeln wählen wir ein geeignetes kartesisches (rechtwinkliges) Koordinatensystem, und zwar so, dass die größte Seite des Dreiecks in der x-Achse und die dritte Ecke auf der positiven y-Achse liegt. Also können wir folgende Koordinaten für die Ecken annehmen: $A(-p,0)$, $B(q,0)$, $C(0,h)$ mit h, p, q > 0. Für den Höhenschnittpunkt berechnen wir $H(0,pq/h)$. Da das Dreieck nach Voraussetzung nicht rechtwinklig ist, gilt $H \neq C$, also $pq \neq h^2$ (Höhensatz). Die aus der Geraden AB und der zugehörigen Höhe bestehende gleichseitige Hyperbel hat die Gleichung $xy = 0$, die aus der Geraden BC und der zugehörigen Höhe bestehende gleichseitige Hyperbel hat die Gleichung $(hx + qy - hq)(qx - hy + pq) = 0$, also hat jeder Kegelschnitt – bis auf den durch die Gleichung $xy = 0$ beschriebenen – durch diese vier Punkte die Gleichung

$$hqx^2 + (q^2 - h^2 + \lambda)xy - hqy^2 + hq(p - q)x + q(pq + h^2)y - hpq^2 = 0,$$

in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} hq & \frac{1}{2}(q^2 - h^2 + \lambda) \\ \frac{1}{2}(q^2 - h^2 + \lambda) & -hq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hq(p-q) & q(pq+h^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - hpq^2 = 0.$$

Für den Mittelpunkt errechnet man

$$\left(\frac{\boldsymbol{q}((\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{pq})\lambda + (\boldsymbol{h}^2 - \boldsymbol{pq})(\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{q}^2)}{(\lambda + \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{h}^2)^2 + 4\boldsymbol{h}^2\boldsymbol{q}^2} \quad \frac{\boldsymbol{hq}((\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})\lambda + (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})(\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{q}^2))}{(\lambda + \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{h}^2)^2 + 4\boldsymbol{h}^2\boldsymbol{q}^2} \right).$$

Diese Koordinaten erfüllen die Gleichung des Feuerbachschen Kreises

$$x^2 + \frac{1}{2}(p-q)x + y^2 - \frac{y}{2h}(h^2 + pq) = 0\,.\ qed$$

In unserem Zusammenhang interessieren nun die gleichseitigen Hyperboloide. Wir haben die folgende Charakterisierung.

Hilfssatz. 1. *Schneidet eine Ebene senkrecht zu einer Mantellinie das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel, so ist das Hyperboloid gleichseitig.*
2. *Jede zu einer Mantellinie eines gleichseitigen Hyperboloids senkrechte Ebene schneidet das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen des vorigen Beweises betrachten wir die Mantellinie

$$A_t + r\,K_t = \begin{pmatrix} a\frac{t^2 - b^2}{t^2 + b^2} & 2b^2\frac{t}{t^2 + b^2} & 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2abt & b(b^2 - t^2) & c(t^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Da die dritte Koordinate des Vektors K_t sicher positiv ist, sind die Vektoren K_t, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, bilden also eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$. Mit Hilfe des GramSchmidt-Befehls in Maple transformieren wir diese Basis in eine Orthonormalbasis U, V, W. Der Vektor U ist ein Vielfaches des Vektors K_t und wird nicht weiter benötigt. Mit den Abkürzungen

$$w_1 = \sqrt{b^2(t^2 - b^2)^2 + c^2(t^2 + b^2)^2}\,,$$

$$w_2 = \sqrt{b^2(t^2 - b^2)^2 + c^2(t^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2t^2}$$

lassen sich die beiden anderen Vektoren der Orthonormalbasis in der Form

$$V = \begin{pmatrix} \dfrac{w1}{w2} & \dfrac{2ab^2t(t^2-b^2)}{w_1w_2} & -\dfrac{2abct(t^2+b^2)}{w_1w_2} \end{pmatrix}, \; W = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{c(t^2+b^2)}{w_1} & \dfrac{b(t^2-b^2)}{w_1} \end{pmatrix}$$

schreiben. Eine zu der betrachteten Mantellinie senkrechte Ebene hat dann die Parameterdarstellung

$$A_t + r\,K_t + vV + wW,\; v, w \in \mathbb{R}.$$

Den Schnitt mit dem Hyperboloid erhalten wir durch Einsetzen in die Gleichung des Hyperboloids. Es ergibt sich die Gleichung eines Kegelschnitts in den Unbestimmten v, w. Dieser Kegelschnitt ist genau dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn die Spur der zugehörigen Matrix verschwindet, das heißt, wenn die Summe der Koeffizienten von v^2 und w^2 gleich 0 ist. Für diese Summe ergibt sich

$$(b^2 + t^2)w_1{}^2w_2{}^2(a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2);$$

Sie ist genau dann 0, wenn gilt:

$$0 = a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Das bedeutet aber gerade, dass die Spur der Matrix des Hyperboloids verschwindet.

Da jede Mantellinie mit einem Richtungsvektor der Form L_t parallel zu einer Mantellinie mit einem Richtungsvektor der Form K_t ist, braucht es dafür keine eigene Rechnung. Als Sonderfall ist nur noch die Mantellinie mit dem Richtungsvektor $K_\infty = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \end{pmatrix}$ zu betrachten. Die entsprechende Rechnung liefert als Summe der fraglichen Koeffizienten direkt $a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2$.

Diese Rechnung beweist den Hilfssatz: Ist einer der betrachteten Ebenenschnitte eine gleichseitige Hyperbel, so verschwindet die Spur der Matrix des Hyperboloids. Verschwindet diese Spur, so ist jeder solche Ebenenschnitt eine gleichseitige Hyperbel. *qed*

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch eine andere Charakterisierung gleichseitiger einschaliger Hyperboloide.

Bemerkung. Ein einschaliges Hyperboloid ist genau dann gleichseitig, wenn es drei paarweise zueinander orthogonale Mantellinien gibt. Zu jeder Mantellinie eines gleichseitigen Hyperboloids gibt es genau ein Paar orthogonaler Mantellinien, die auch zueinander orthogonal sind.

Beweis. Es gebe drei paarweise zueinander orthogonale Mantellinien. Da jede Mantellinie der K-Schar parallel zu einer Geraden der L-Schar ist, können wir annehmen, dass wir drei solche Mantellinien in der K-Schar haben. Die Richtungsvektoren mögen zu den Parametern t_0, t_1, t_2 gehören. Die Orthogonalität bedeutet zunächst

$$K_{t_0} \cdot K_{t_i} = 0\,,$$

für $i = 1, 2$, das heißt,

$$4a^2b^2t_0t_i + b^2(b^2 - t_0^2)\,(b^2 - t_i^2) + c^2(b^2 + t_0^2)\,(b^2 + t_i^2) = 0.$$

Damit sind die Parameterwerte t_1, t_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(c^2(b^2 + t_0^2) - b^2(b^2 - t_0^2))t^2 + 4a^2b^2t_0t + b^2(c^2(b^2 + t_0^2) + b^2(b^2 - t_0^2)) = 0$$

für die Unbekannte t. Aus dem Satz von Vieta folgt

$$t_1 + t_2 = \frac{4a^2b^2t_0}{b^4 - (t_0^{\ 2} + c^2)b^2 - c^2t_0^{\ 2}}\,,\ t_1t_2 = \frac{b^2\left(b^4 - (t_0^{\ 2} - c^2)b^2 + c^2t_0^{\ 2}\right)}{(t_0^{\ 2} + c^2)b^2 + c^2t_0^{\ 2} - b^4},$$

sowie

$$t_1^{\ 2} + t_2^{\ 2} = (t_1 + t_2)^2 - 2\,t_1t_2 = \frac{2b^2\left((b^4 - c^4)(t_0^{\ 4} + b^4) + 2b^2(4a^4 - b^2 - c^2)t_0^{\ 2}\right)}{((t_0^{\ 2} + c^2)b^2 + c^2t_0^{\ 2} - b^4)^2}.$$

Nun sind aber auch noch die Geraden zu den Parametern t_1 und t_2 zueinander orthogonal. Also gilt auch

$$K_{t_1} \cdot K_{t_2} = 0\,,$$

das heißt,

$$(b^2 + c^2)t_1^{\ 2}t_2^{\ 2} + b^2(c^2 - b^2)(t_1^{\ 2} + t_2^{\ 2}) + 4a^2b^2t_1t_2 + b^4(b^2 + c^2) = 0.$$

Setzt man die gefunden Werte ein, so erhält man

$$\frac{4b^2\left(4a^2b^2t_0^{\ 2} + b^2(t_0^{\ 2} - b^2)^2 + c^2(t_0^{\ 2} + b^2)^2\right)\left(a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2\right)}{((t_0^{\ 2} + c^2)b^2 + c^2t_0^{\ 2} - b^4)^2} = 0.$$

Daraus folgt aber $a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0$, was wieder bedeutet, dass die Spur der Matrix des Hyperboloids verschwindet.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, bei dem einer der Parameter t_0, t_1, t_2 unendlich ist. O.B.d.A. können wir $t_0 = \infty$ annehmen. Dann sind t_1, t_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(b^2 + c^2)t^2 - b^2\,(b^2 - c^2) = 0.$$

Damit haben wir nach Vieta

$$t_1 + t_2 = 0,\ t_1 t_2 = \frac{b^2(c^2-b^2)}{(c^2+b^2)},\ t_1^{\,2} + t_2^{\,2} = \frac{2b^2(b^2-c^2)}{(b^2+c^2)}.$$

Wir setzen wieder in die Bedingung dafür ein, dass die zu den Parametern t_1 und t_2 gehörenden Geraden der K-Schar zueinander orthogonal sind, und erhalten

$$\frac{4b^2(a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)}{b^2+c^2} = 0;$$

es handelt sich um die Gleichung, die man aus dem vorigen Fall durch den Grenzübergang $t_0 \to \infty$ erhält und die wieder zeigt, dass die Spur der Matrix des Hyperboloids verschwindet.

Nun sei umgekehrt vorausgesetzt, dass die Spur der Matrix des Hyperboloids verschwindet. Wir zeigen, dass es zu jeder Geraden der K-Schar zwei weitere Geraden gibt, die beide zu der ersten orthogonal und zueinander orthogonal sind. Der Parameter der ersten Geraden sei t_0.

Wir behandeln zunächst den Fall $t_0 = \infty$. Dass die Spur verschwindet, bedeutet

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2},$$

woraus $\frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$ und damit $c^2 < b^2$ folgt. Also hat die quadratische Gleichung

$$(b^2 + c^2)t^2 - b^2\,(b^2 - c^2) = 0$$

zwei reelle Lösungen t_1 und t_2. Die zu diesen Parametern gehörenden Geraden leisten nach den vorherigen Rechnungen das Gewünschte.

Im Fall $t_0 \neq \infty$ haben wir die quadratische Gleichung

$$(c^2(b^2 + t_0^{\,2}) - b^2(b^2 - t_0^{\,2}))t^2 + 4a^2b^2t_0t + b^2(c^2(b^2 + t_0^{\,2}) + b^2(b^2 - t_0^{\,2})) = 0$$

für die Unbekannte t zu diskutieren. Der Koeffizient von t^2

$$c^2(b^2 + t_0^{\,2}) - b^2(b^2 - t_0^{\,2}) = (b^2 + c^2)t_0^{\,2} - b^2\,(b^2 - c^2)$$

verschwindet genau dann, wenn t_0 einer der beiden Parameter im vorigen Fall ist. Dafür ist die Behauptung klar. Wir können also annehmen, dass dieser Koeffizient nicht verschwindet und eine echte quadratische Gleichung vorliegt. Die Existenz von reellen Lösungen erkennt man an der Diskriminante:

$4a^4b^4t_0^2 - (c^2(b^2 + t_0^2) - b^2(b^2 - t_0^2))\, b^2(c^2(b^2 + t_0^2) + b^2(b^2 - t_0^2)) =$

$= b^2(4a^4b^2t_0^2 - c^4(b^2 + t_0^2)^2 + b^4(b^2 - t_0^2)^2) = b^2((b^4 - c^4)\,(b^2 - t_0^2)^2 + 4b^2t_0^2(a^4 - c^4)).$

Eben wurde benutzt, dass aus der Voraussetzung $b^2 > c^2$ folgt; ebenso gilt $a^2 > c^2$. Da das Quadrieren monoton ist, ist die Diskriminante positiv. Also hat die betrachtete Gleichung zwei reelle Lösungen t_1, t_2, die wieder das Gewünschte leisten. *qed*

Wir kommen nun endlich zum Beweis des auf Seite 37 formulierten Satzes. Es sei $[A_0, A_1, A_2, A_3]$ ein Tetraeder mit vier paarweise windschiefen Raumhöhen h_j, $j = 0, 1, 2, 3$. Aus der Voraussetzung folgt, dass die Höhenfußpunkte H_j auf keiner Höhe der Gegenseite zur Ecke A_j liegen, insbesondere von deren Höhenschnittpunkt H'_j verschieden sind. Mit h'_k seien die Parallelen zu den Raumhöhen h_k durch die Höhenschnittpunkte H'_k bezeichnet.

Wir behaupten nun, dass jede Raumhöhe h_j jede der Geraden h'_k eigentlich oder uneigentlich schneidet. Im Fall $k = j$ sind die Geraden nach Definition parallel, also können wir $k \neq j$ annehmen. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir o.B.d.A. $k = 0$, $j = 1$. Wir fällen das Lot von H_1 auf die Ebene $A_1A_2A_3$ und erhalten den Lotfußpunkt

$$L = H_1 + r(A_0 - H_0) = A_1 + s(A_2 - A_1) + t(A_3 - A_1);$$

da die Vektoren $A_0 - H_0$, $A_2 - A_1$, $A_3 - A_1$ linear unabhängig sind, sind die Koeffizienten r, s, t eindeutig bestimmt. Die Koeffizienten s und t können auch nicht beide verschwinden, denn dann wären die Vektoren $A_0 - H_0$ und $A_1 - H_1$ linear abhängig. Also ist der Lotfußpunkt L von der Ecke A_1 des Tetraeders verschieden. Wir berechnen

$$(A_1 - L)(A_3 - A_2) = (A_1 - H_1 + H_1 - L)(A_3 - A_2) =$$

$$= (A_1 - H_1)(A_3 - A_2) - r(A_0 - H_0)\,(A_3 - A_2) = 0.$$

Also ist die Gerade A_1L – es handelt sich um das Bild der Raumhöhe h_1 unter der orthogonalen Projektion in die Ebene $A_1A_2A_3$ – eine Höhe des Dreiecks $[A_1, A_2, A_3]$ und enthält den Höhenschnittpunkt H'_0:

$$H'_0 = A_1 + u(L - A_1) = A_1 + u(H_1 + r(A_0 - H_0) - A_1).$$

Die Gerade h'_0 hat damit die Parameterdarstellung

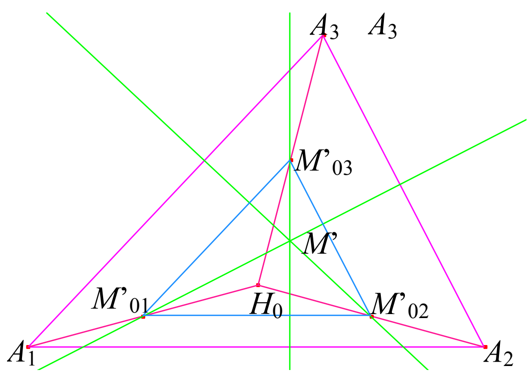
$$A_1 + u(H_1 + r(A_0 - H_0) - A_1) + v(A_0 - H_0).$$

Die Wahl $v = -ur$ liefert dann den gesuchten Schnittpunkt $A_1 + u(H_1 - A_1)$ der Raumhöhe h_1 und der Geraden h'_0.

Die Gleichung $(A_j - H_j)X = (A_j - H_j)\, H_j$ beschreibt die Gegenseite der Ecke A_j, als Ebene aufgefasst. Da drei solche Ebenen genau einen Punkt, die vierte Ecke gemeinsam haben, hat die Koeffizientenmatrix des entstehenden Gleichungssystems Maximalrang. Also sind je drei der Vektoren $A_j - H_j$ linear unabhängig. Dabei handelt es sich um die Richtungsvektoren der Raumhöhen h_j. Also gibt es ein eindeutig bestimmtes einschaliges Hyperboloid q, das die drei Raumhöhen h_i, $i = 1, 2, 3$, enthält. Es bleibt zu zeigen, dass auch die vierte Raumhöhe h_0 in dem Hyperboloid q enthalten ist sowie dass dieses Hyperboloid gleichseitig und der Punkt von Monge sein Mittelpunkt ist.

Da die vier Geraden h'_k, $k = 0, 1, 2, 3$, die drei Raumhöhen h_i, $i = 1, 2, 3$ schneiden liegen sie alle in dem Hyperboloid q. Da die Raumhöhe h_0 die vier Geraden h'_k schneidet, liegt sie nun ebenfalls in dem Hyperboloid.

Der Mittelpunkt des Hyperboloids q liegt auf den Mittelparallelen der Geraden h_j und h'_j, $j = 0, 1, 2, 3$. Um diesen Punkt als Punkt von Monge zu identifizieren, genügt es zu zeigen, dass die Mittelpunkte der Strecken $[H_j, H'_j]$ die Bilder des Punktes von Monge unter den orthogonalen Projektionen in die Gegenseiten der Ecken A_j ist. Der einfachen Symbolik halber beschränken wir uns wieder auf die Betrachtung des Falles $j = 0$. Unter der orthogonalen Projektion in die Ebene $A_1A_2A_3$ werden die Mittelpunkte M_{0i} der Kanten $[A_0, A_i]$, $i = 1, 2, 3$, in die Mittelpunkte M'_{0i} der Strecken $[H_0, A_i]$ und die Höhenebenen durch die Punkte M_{0i} in die Lote von den Punkten M'_{0i} auf die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $[A_1, A_2, A_3]$, also in die Höhen des Dreiecks $[M_{01}, M_{02}, M_{03}]$ abgebildet.



Damit ist der Höhenschnittpunkt M' des Dreiecks $[M_{01}, M_{02}, M_{03}]$ das Bild des Punktes von Monge unter den orthogonalen Projektionen in die Gegenseiten der Ecke A_0. Durch die zentrische Streckung mit dem Zentrum H0 und dem Faktor ½ werden das Dreieck $[A_1, A_2, A_3]$ auf das Dreieck $[M_{01}, M_{02}, M_{03}]$ und damit der Höhenschnittpunkt H'_0 auf den Punkt M' abgebildet. Also ist M' der Mittelpunkt der Strecke $[H_0, H'_0]$, wie gewünscht.

Die Seiten des Tetraeders sind senkrecht zu den Mantellinien h_j und h'_j. Ist ein Seitendreieck nicht rechtwinklig, so ist der Schnitt des Hyperboloids q mit diesem Seitendreieck ein Kegelschnitt, der die Ecken und den Höhenschnittpunkt enthält, also eine gleichseitige Hyperbel. Damit ist die Fläche q ein gleichseitiges Hyperboloid.

Bleibt zu überlegen, was passiert, wenn alle Seitendreiecke eines Tetraeders rechtwinklig sind. Die Winkel der Seitendreiecke eines Tetraeders heißen *ebene Winkel* des Tetraeders. Dazu sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1. An einer Ecke, etwa an der Ecke D, stoßen drei ebene rechte Winkel zusammen. Dann ist das Dreieck $[A,B,C]$ sicherlich nicht rechtwinklig. Wäre etwa die Seite $[A,B]$ Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so müsste nach Pythagoras gelten:
   $a'^2 + b'^2 = (a'^2 + c'^2) + (b'^2 + c'^2)$,
   was nicht sein kann. Dieser Fall kann nicht auftreten.
2. An einer Ecke stoßen zwei rechte ebene Winkel zusammen. Wir können die Bezeichnung der Ecken so wählen, dass an der Ecke A zwei rechte ebene Winkel zusammen stoßen und die Kante AB die gemeinsame Kathete ist. Dann sind die Winkel BAC und BAD rechte Winkel. Das bedeutet, dass die Kante AB senkrecht auf den Kanten AC und AD, also der Ebene ACD steht und damit mit der Höhe h_B zusammenfällt, also die Höhe h_A im Punkt A schneidet. Also tritt in diesem Fall kein Hyperboloid auf.
3. Nun bleiben die Fälle zu betrachten, bei der an jeder Ecke genau ein ebener rechter Winkel auftritt. Die Auflistung der Möglichkeiten ist eine kombinatorische Aufgabe. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass das Dreieck $[A,B,C]$ einen rechten Winkel an der Ecke A besitzt, also gilt: $a^2 = b^2 + c^2$. Für das Dreieck $[A,B,D]$ sind dann noch zwei Fälle möglich:
   a. $\angle ABD = 90^\circ$, $a'^2 = c^2 + b'^2$: Nun sind für das Dreieck $[A,C,D]$ die beiden folgenden Fälle möglich:
      i. $\angle ACD = 90^\circ$, $a'^2 = b^2 + c'^2$: Jetzt muss noch $\angle BDC = 90^\circ$, $a^2 = b'^2 + c'^2$ gelten und wir haben:
         $b^2 + c^2 = b'^2 + c'^2, c^2 + b'^2 = b^2 + c'^2$.
         Subtraktion dieser beiden Gleichungen führt auf $b = b'$ und damit auf $c = c'$ und schließlich auf $a = a'$. Damit hätten wir ein sogenanntes *gleichschenkliges* Tetraeder. Die kongruenten Seitendreiecke eines gleichschenkligen Tetraeders sind aber immer spitzwinklig, also kann dieser Fall nicht auftreten.
      ii. $\angle ADC = 90^\circ$, $b^2 = a'^2 + c'^2$: Jetzt muss noch $\angle BCD = 90^\circ$, $b'^2 = a^2 + c'^2$ gelten und wir haben:
         $a^2 = b^2 + c^2 = a'^2 + c'^2 + c^2 = c^2 + b'^2 + c'^2 + c^2 =$
         $= c^2 + a^2 + c'^2 + c'^2 + c^2 = a^2 + 2(c^2 + c'^2)$,
         woraus $c = c' = 0$ folgen würde, auch unmöglich.
   b. $\angle ADB = 90^\circ$, $c^2 = a'^2 + b'^2$: Nun muss das Dreieck $[A,C,D]$ an der Ecke C einen rechten Winkel haben, also gilt $a'^2 = b^2 + c'^2$. Weiter muss noch $\angle DBC = 90^\circ$, $c'^2 = b'^2 + a^2$ gelten und wir haben:
      $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + a'^2 + b'^2 = b^2 + b^2 + c'^2 + b'^2 =$
      $= b^2 + b^2 + b'^2 + a^2 + b'^2 = a^2 + 2(b^2 + b'^2)$,
      woraus $b = b' = 0$ folgen würde, wieder unmöglich. *qed*

Die Raumhöhen sind auch für die Volumenberechnung eines Tetraeders nützlich. Dazu betrachten wir allgemeiner ein n-Simplex $\Delta^n = [A_0, A_1, \ldots, A_n]$ im $\mathbb{R}^n$. Wir verändern das Koordinatensystem, so dass die Ecken A_j die Koordinaten $(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj})$ mit $a_{ii} > 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots,$n und $a_{ij} = 0$ für $0 \leq j < i \leq n$ erhalten. Die Größen a_{ii} lassen sich dann als die Höhen des Simplexes $[A_0, A_1, \ldots, A_i]$ in Bezug auf das Simplex $[A_0, A_1, \ldots,$

$A_{i\text{-}1}$]als Grundsimplex auffassen. Die Matrix ($A_j - A_0$) ist eine Dreiecksmatrix mit der Determinante $a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$. Also erhält man für das Volumen des Simplexes

$$\mathrm{V} = \frac{1}{n!}a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{(n-1)!}a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{n-1n-1}\right)\cdot a_{nn}.$$

Für Dreiecke, $n = 2$ haben wir die Flächenformel

Fläche = ½ Grundlinie mal Höhe,

für Tetraeder, dreiseitige Pyramiden, also für $n = 3$, ist das die bekannte Formel:

Volumen = ein Drittel Grundfläche mal Höhe.

Für die Fläche eines Dreiecks benutzt man häufig auch die Formel

Fläche = ½ Produkt zweier Seiten mal Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Diese Formel hat ein interessantes Analogon für Tetraeder. Dazu erinnern wir zunächst an das gemeinsame Lot zweier windschiefer Geraden. Sind die Geraden in Parameterdarstellung gegeben:

$$g: A + rU,\ h: B + sV,$$

so sind die Richtungsvektoren U, V linear unabhängig und die Vektoren U, V, $U \times V$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Damit gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten r, s, t, derart dass gilt:

$$A + rU = B + sV + tU \times V.$$

Durch Verschiebung der Aufpunkte können wir $r = s = 0$, das heißt,

$$A = B + tU \times V.$$

erreichen. Damit ist $B + t'U \times V$ die Parameterdarstellung einer eindeutig bestimmten Geraden, die auf den gegebenen Geraden g und h senkrecht steht, für den Parameter $t' = 0$ die Gerade h im Punkt B und für den Parameter $t' = t$ die Gerade g im Punkt A schneidet. Diese Gerade ist das *gemeinsame Lot* der Geraden g und h. Der Abstand der neuen Aufpunkte A und B wird als *Abstand der windschiefen Geraden* g und h bezeichnet. Als *Winkel zwischen den windschiefen Geraden* bezeichnet man den Winkel zwischen den Richtungsvektoren.

Nun betrachten wir ein Tetraeder [A,B,C,D] mit den üblichen Bezeichnungen für die Kantenlängen. Ferner bezeichne d den Abstand der Gegenkanten AB und CD, sowie θ deren Winkel. Wir wählen ein Koordinatensystem so, dass die Kante AB die x-Achse

(Richtung von A nach B) und das gemeinsame Lot die z-Achse ist. Als Aufpunkt für die Gerade CD können wir dann den Punkt $(0,0,d)$, als Richtungsvektor den Vektor $(\cos\theta,\sin\theta,0)$ nehmen. Die Ecken des Tetraeders haben dann Koordinaten der Form $A(a_1,0,0)$, $B(a_1+c,0,0)$, $C(c_1\cos\theta, c_1\sin\theta,d)$, $D(d_1\cos\theta, d_1\sin\theta,d)$. Zur Volumenberechnung betrachten wir die Matrix

$$(B-A, C-A, D-A) = \begin{pmatrix} c & c_1\cos\theta - a_1 & d_1\cos\theta - a_1 \\ 0 & c_1\sin\theta & d_1\sin\theta \\ 0 & d & d \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $c \cdot d \cdot (c_1 - d_1) \cdot \sin\theta$. Wir berechnen weiter

$$c' = \|D-C\| = |c_1 - d_1|$$

und damit

$$V = \frac{1}{6}|c \cdot d \cdot (c_1 - d_1) \cdot \sin\theta| = \frac{1}{6} c \cdot c' \cdot d \cdot \sin\theta.$$

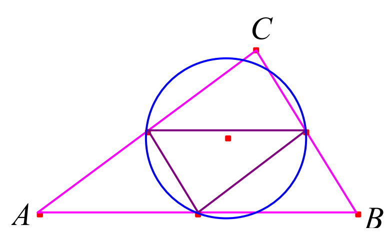
Damit lässt sich das Volumen eines Tetraeders berechnen als

> ein Sechstel vom Produkt zweier Gegenkanten mal dem Abstand dieser Gegenkanten mal dem Sinus des Winkels zwischen ihnen.

II. Elementargeometrie in der Ebene

1. Der Feuerbachsche Kreis

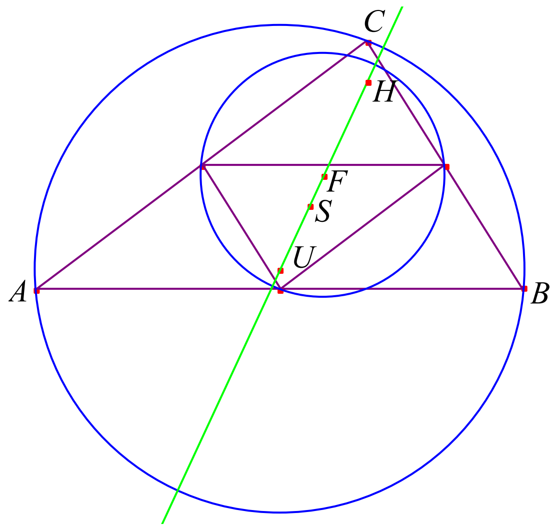
Der *Feuerbachsche Kreis* eines Dreiecks $[A,B,\mathrm{C}]$ ist der Umkreis des Seitenmittendreiecks.



Er ist das Bild des Umkreises des Dreiecks unter der zentrischen Streckung mit dem Schwerpunkt S als Zentrum und dem Faktor -1/2. Der Radius f des Feuerbachschen Kreises ist damit die Hälfte des Umkreisradiusses R:

$$f = \frac{1}{2} R = \frac{abc}{8\Delta},$$

wobei Δ die Fläche des Dreiecks bezeichnet.



Der Mittelpunkt *F* des Feuerbachschen Kreises ergibt sich als das Bild des Umkreismittelpunktes *U*.

$$F = S - \frac{1}{2}(U - S) = \frac{3}{2}\ S - \frac{1}{2} U.$$

Die Gerade *US* ist die Euler-Gerade des Dreiecks, die auch den Höhenschnittpunkt *H* enthält. Da der Schwerpunkt die Verbindungsstrecke vom Höhenschnittpunkt *H* zum Umkreismittelpunkt *U* im Verhältnis 2 : 1 teilt, gilt

$$S = \frac{1}{3} H + \frac{2}{3} U$$

und damit

$$F = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} U = H + \frac{1}{2}(U - H);$$

das bedeutet,

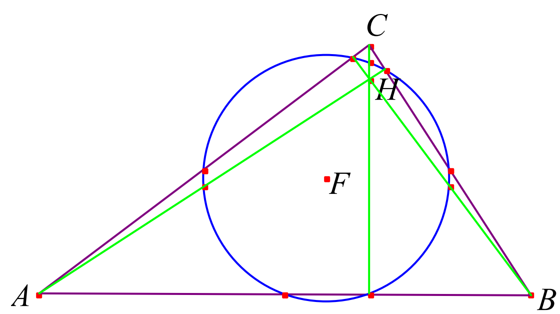
- der Mittelpunkt *F* des Feuerbachschen Kreises ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt *H* und Umkreismittelpunkt *U*;
- die zentrische Streckung mit dem Höhenschnittschnitt *H* als Zentrum und dem Faktor ½ bildet den Umkreismittelpunkt *U* auf den Mittelpunkt *F* des Feuerbachschen Kreises, und damit auch den Umkreis auf den Feuerbachschen Kreis ab.

Erinnerung. Zwei nicht konzentrische Kreise besitzen immer ein inneres und ein äußeres Ähnlichkeitszentrum. Bei gleichen Radien ist das äußere Ähnlichkeitszentrum ein uneigentlicher Punkt. Die vorangehenden Rechnungen zeigen, dass der Schwerpunkt das innere Ähnlichkeitszentrum von Umkreis und Feuerbachschem Kreis ist und der Höhenschnittpunkt das äußere Ähnlichkeitszentrum.

Ein bekannter Satz über den Feuerbachschen Kreis besagt:

Satz [Neunpunktekreis]. *Auf dem Feuerbachschen Kreis eines Dreiecks liegen die folgenden (nicht notwendig paarweise verschiedenen) neun Punkte*:

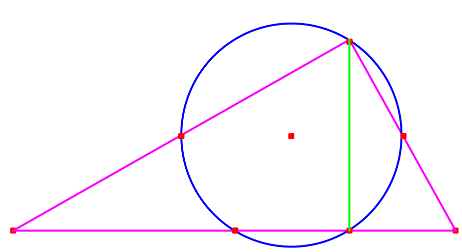
1. *die Mittelpunkte der drei Seiten*,
2. *die Mittelpunkte der drei Strecken, die den Höhenschnittpunkt mit den Ecken des Dreiecks verbinden und*
3. *die drei Höhenfußpunkte*.

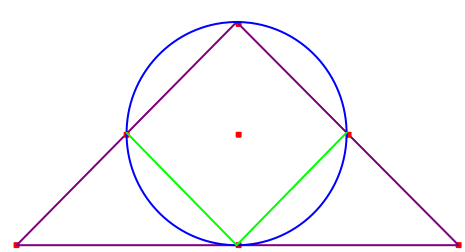


Ist das Dreieck weder rechtwinklig noch gleichschenklig, so sind diese Punkte paarweise verschieden.

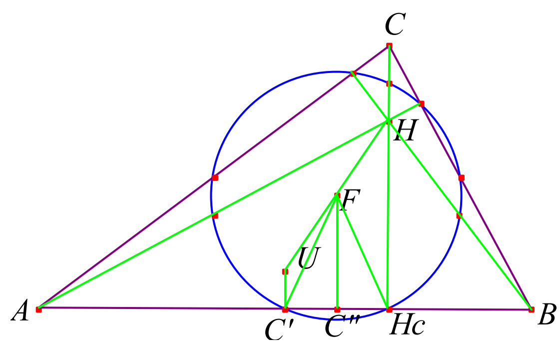
Beweis. 1. Die Mittelpunkte der Seiten definieren den Feuerbachschen Kreis.

2. Die Mittelpunkte der genannten Strecken sind die Bilder der Ecken des Dreiecks unter der bereits genannten zentrischen Streckung mit dem Höhenschnittpunkt als Zentrum und dem Faktor ½. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die der Hypotenuse gegenüberliegende Ecke der Höhenschnittpunkt. Das heißt, diese drei Punkte sind die Mittelpunkte der Katheten und deren gemeinsame Ecke. Zu den Punkten unter 1. kommt also nur ein Punkt hinzu.





3. O.B.d.A. betrachten wir den Höhenfußpunkt H_C der Höhe durch die Ecke *C*. Mit *C*’ sei der Mittelpunkt der Seite [*A*,*B*] bezeichnet. Die Geraden HH_C (Höhe durch die Ecke *C*) und *C*’*U* (Mittelsenkrechte der Seite [*A*,*B*]) sind parallel, also ist das Viereck HH_C *C*’*U* ein Trapez. Der Mittelpunkt *F* des Feuerbachschen Kreises ist der Mittelpunkt des Schenkels [*H*,*U*], die Mittelparallele schneidet den anderen Schenkel [H_C,*C*’] im Mittelpunkt *C*“ und steht ebenfalls senkrecht auf der Geraden *AB*.



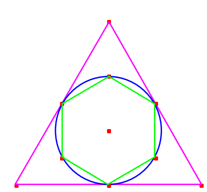
Für die Dreiecke [H_C,*C*“,*F*] und [*C*’,*C*“,*F*] gilt demnach: $\overline{H_C C''} = \overline{C'C''}$, $\angle H_C C''F = \angle C'C''F = 90^{\circ}$ und $\overline{\boldsymbol{C''F}} = \overline{\boldsymbol{C''F}}$; also sind diese rechtwinkligen Dreiecke kongruent und es folgt die Gleichheit der Hypotenusen

$$\overline{\boldsymbol{H_C F}} = \overline{\boldsymbol{C'F}} = \text{Radius des Feuerbachschen Kreises},$$

da *F* der Mittelpunkt und *C*’ ein Kreispunkt ist. Also liegt auch der Höhenfußpunkt H_C auf dem Feuerbachschen Kreis.

Ist das Dreieck rechtwinklig, so fallen zwei Höhenfußpunkte mit der Gegenecke der Hypotenuse zusammen. Ferner entartet das Trapez zu einem Dreieck, dessen Mittelparallele, parallel zur Seite HH_C zu betrachten ist; die weitere Argumentation verläuft wie im nicht-rechtwinkligen Fall. Wir haben also nur den Höhenfußpunkt in der Hypotenuse als zusätzlichen Kreispunkt, statt neun nur fünf Punkte. Im Fall eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist der Mittelpunkt der Hypotenuse auch Höhenfußpunkt, wir haben nur vier Punkte, die ein Quadrat bilden.

Bei einem gleichschenkligen, aber weder rechtwinkligen noch gleichseitigen Dreieck fällt der Höhenfußpunkt in der Basis mit deren Mittelpunkt zusammen, es ergeben sich acht Kreispunkte. Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle Höhenfußpunkte Seitenmittelpunkte, also haben wir nur sechs Punkte, die ein reguläres Hexagon bilden.

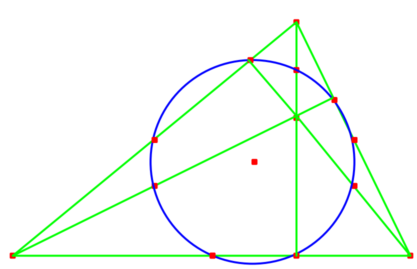


Nun ist noch zu überlegen, dass diese neun Punkte bei einem Dreieck, das weder rechtwinklig noch gleichschenklig ist, tatsächlich paarweise verschieden sind. Die drei Seitenmitten bilden – wie schon bewiesen – immer ein Dreieck und sind damit paarweise verschieden. Die trilinearen Koordinaten des Höhenschnittpunkts sind ($\cos\beta\cdot\cos\gamma,\cos\gamma\cdot\cos\alpha,\cos\alpha\cdot\cos\beta$); sie sind alle von 0 verschieden, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist. Also liegt in diesem Fall der Höhenschnittpunkt auf keiner Seite des Dreiecks. Er bildet mit je zwei Ecken des Dreiecks selbst ein Dreieck, dessen Seitenmitten paarweise verschieden sind. Also sind bei einem nicht-rechtwinkligen Dreieck die unter 2. genannten Punkte paarweise verschieden und verschieden von den unter 1. genannten Punkten. Damit haben wir wenigstens sechs Punkte.

Die Höhenfußpunkte sind bei einem nicht-rechtwinkligen Dreieck paarweise verschieden und verschieden von den Punkten unter 2. Einer oder alle drei können mit den Seitenmitten zusammenfallen. Das ist genau dann der Fall, wenn das Dreieck gleichschenklig oder sogar gleichseitig ist. Bei einem nicht gleichschenkligen (und nicht rechtwinkligen Dreieck) haben wir damit drei weitere Punkte auf dem Feuerbachschen Kreis, also – wie behauptet – insgesamt neun paarweise verschiedene Punkte. *qed*

Dieser Satz erklärt die englische Bezeichnung für den Mittelpunkt F = X(5) des Feuerbachschen Kreises: „Nine-Point Center“. Für ein nicht-rechtwinkliges Dreieck liefert der Satz auch, dass der Feuerbachsche Kreis der drei Dreiecke, die entstehen, wenn man jeweils eine Ecke durch den Höhenschnittpunkt ersetzt, mit dem Feuerbachschen Kreis des Ausgangsdreiecks überstimmt. Wir bemerken noch, dass der Höhenschnittpunkt der neuen Dreiecke jeweils mit der weggelassenen Ecke des Ausgangsdreiecks übereinstimmt.

Diese Situation lässt sich noch anderes darstellen. Man spricht von einem *orthozentrischen Viereck*, wenn man vier Punkte hat, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, und einer dieser Punkte, somit jeder dieser Punkte, Höhenschnittpunkt des von den übrigen drei Punkten gebildeten Dreiecks ist. Die vier Punkte sind die *Ecken* des Vierecks. Ein orthozentrisches Viereck hat sechs *Seiten*, die Verbindungsstrecken von je zwei Ecken; es macht hierbei keinen Sinn, zwischen Seiten und Diagonalen zu unterscheiden. Jede Seite verbindet zwei Ecken, die Seite, die die beiden anderen Ecken verbindet, ist die *Gegenseite*; wir haben *drei Paare von Gegenseiten*. Unser Satz liefert nun die folgende Aussage: *Die sechs Seitenmitten und die drei Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten eines orthozentrischen Vierecks liegen auf einem Kreis*, dem *Feuerbachschen Kreis* des orthozentrischen Vierecks.



Historisch ist anzumerken, dass Feuerbach (1800-1834) nicht wusste, dass die Mittelpunkte der drei Strecken, die den Höhenschnittpunkt mit den Ecken des Dreiecks verbinden, auf dem Kreis durch „die Fußpunkte der Perpendikel“ liegen. Die Neun-Punkte-Eigenschaft wird aber schon vor dem Erscheinen von Feuerbachs Dissertation 1822 von den französischen Mathematikern Brianchon (1783-1864) und Poncelet (1788-1867) festgestellt und 1821 veröffentlicht. Der manchmal auch nach Euler benannte Kreis trägt den Namen „Feuerbachscher Kreis“ aufgrund des folgenden nicht trivialen Satzes.

Satz [Feuerbach 1822]. *Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks berührt dessen Inkreis und Ankreise*.

Beweis. Es gibt eine große Zahl verschiedener Beweise, die alle nicht sehr durchsichtig sind. Wir führen ihn direkt mit Benutzung eines Computeralgebrasystems. Zu einem gegebenen Dreieck $[A,B,C]$ wählen wir das Koordinatensystem so, dass der Höhenfußpunkt H_C der Ursprung ist und die Gerade AB mit der x-Achse zusammenfällt. Dabei wählen wir die Orientierung der x-Achse so, dass die Richtung von – nach + mit der Richtung von A nach B übereinstimmt. Dann haben die Ecken des Dreiecks Koordinatendarstellungen der Form $A(-p,0)$, $B(q,0)$, $C(0,h)$; in den üblichen Bezeichnungen haben die Parameter h, p, q folgende Bedeutung:

$$h = \overline{CH_C}\,,\ p = \cos\alpha,\ q = \cos\beta.$$

Für die Längen der Seiten gilt:

$$a^2 = h^2 + q^2,\ b^2 = h^2 + p^2,\ c = p + q;$$

für die Fläche des Dreiecks ergibt sich:

$$\Delta = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}(p+q)\mathrm{h}.$$

Die Seitenmitten sind die Punkte $A'(q/2,h/2)$, $B'(-p/2,h/2)$, $C'((q-p)/2,0)$. Der Umkreis des Seitenmittendreiecks, also der Feuerbachsche Kreis hat die schon früher angegebene Gleichung:

$$x^2 + \frac{1}{2}(p-q)x + y^2 - \frac{y}{2h}(h^2 + pq) = 0\,,$$

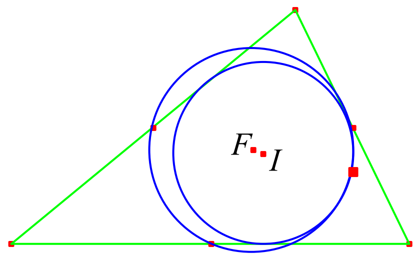
also den Mittelpunkt

$$F\left(\frac{q-p}{4}, \frac{h^2+pq}{4h}\right)$$

und den Radius

$$f = \frac{ab}{4h}.$$

Wir zeigen zuerst, dass der Feuerbachsche Kreis und der Inkreis des Dreiecks sich von innen berühren,



genauer:

$$\overline{FI} = f - \rho,$$

wobei I den Inkreismittelpunkt und ρ den Inkreisradius bezeichnet. Da alle auftretenden Zahlen nicht negativ sind, ist das Quadrieren dieser Gleichung eine Äquivalenzumformung:

$$(F-I)^2 = \overline{FI}^2 = (f-\rho)^2.$$

Es genügt also zu zeigen:

$$(F-I)^2 - (f-\rho)^2 = 0.$$

Die kartesischen Koordinaten des Inkreismittelpunktes I erhalten wir am leichtesten ausgehend von den trilinearen Koordinaten (1,1,1). Sie führen auf die normierten baryzentrischen Koordinaten $\left(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s}\right)$ mit $s = ½\,(a + b + c)$, wie üblich. Damit ergibt sich

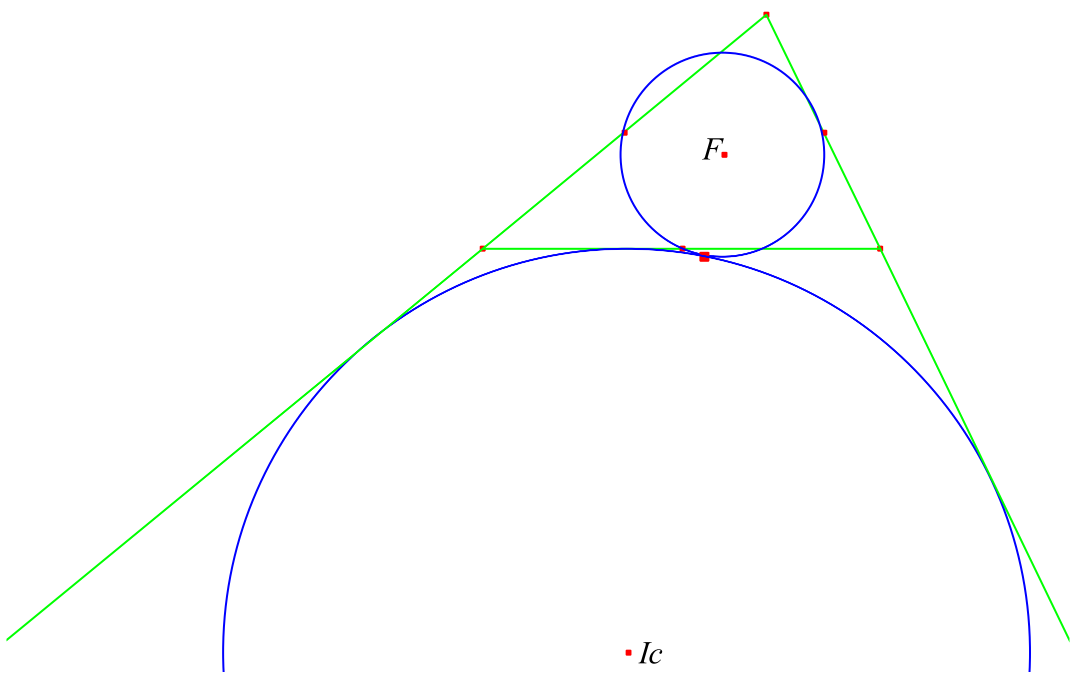
$$I\left(\frac{bq - ap}{2s}, \frac{ch}{2s}\right).$$

Für den Inkreisradius ρ erhalten wir

$$\rho = \frac{\Delta}{s} = \frac{h(p+q)}{2s}.$$

Den Rest erledigt ein Computeralgebrasystem. Die zu beweisende Gleichung führt auf einen Polynom in den Unbestimmten a, b, c, h, p, q, das unter Berücksichtigung der angegebenen Beziehungen zwischen diesen Unbestimmten verschwinden soll.[2] Da das Polynom in den Unbestimmten a und b jeweils den Grad 4 hat, erhält man dies elementar unter Vermeidung von Quadratwurzeln durch die Substitutionen $a^2 = h^2 + q^2$, $b^2 = h^2 + p^2$, $a^3 = a(h^2 + q^2)$, $b^3 = b(h^2 + p^2)$, $a^4 = (h^2 + q^2)^2$, $b^4 = (h^2 + p^2)^2$.

Da wir bei der Festlegung des Koordinatensystem jede Ecke eines gegebenen Dreiecks als die Ecke C wählen können, genügt bezüglich der Ankreise zu zeigen, dass der Ankreis, der die Seite AB von außen berührt, auch den Feuerbachschen Kreis von außen berührt.



Jetzt ist

$$(F - I_C)^2 - (f + \rho_C)^2 = 0$$

zu zeigen, wobei I_C den entsprechenden Ankreismittelpunkt und ρ_C den zugehörigen Ankreisradius bezeichnet. Ausgehend von den trilinearen Koordinaten (1,1,-1) des Ankreismittelpunktes I_C erhält man die normierten baryzentrischen Koordinaten
$\left(\frac{a}{2(s-c)}, \frac{b}{2(s-c)}, \frac{-c}{2(s-c)}\right)$ und damit

$$I_C = \left(\frac{bq - ap}{2(s-c)}, \frac{-ch}{2(s-c)}\right).$$

[2] Im Sinne der abstrakten Algebra bedeutet das, dass das in Diskussion stehende Polynom in dem von den Polynomen $a^2 - h^2 - q^2$, $b^2 - h^2 - p^2$, $c - p - q$ erzeugten Ideal des Polynomringes liegt.

Zur Bestimmung des Ankreisradius ρ_C bemerken wir, dass die Vereinigung der Dreiecke $[A,C,I_C]$ und $[B,C,I_C]$ gleich der Vereinigung der Dreiecke $[A,B,C]$ und $[A,B, I_C]$ ist, wobei die vereinigten Dreiecke jeweils nur eine Seite, also eine Menge vom Flächenmaß 0 gemeinsam haben. Also haben wir die Flächengleichheit

$$\tfrac{1}{2}\, b\rho_C + \tfrac{1}{2}\, a\rho_C = \tfrac{1}{2}\, hc + \tfrac{1}{2}\, c\rho_C,$$

woraus sich

$$\rho_C = \frac{h(p+q)}{2(s-c)}$$

ergibt. Der Rest folgt nun wie im Fall des Inkreises. *qed*

Interpretiert man den Satz von Feuerbach für orthozentrische Vierecke, so ergibt sich, dass der Feuerbachsche Kreis eines orthozentrischen Vierecks sechzehn Kreise berührt, die Inkreise der vier Dreiecke, die durch Weglassen jeweils einer Ecke entstehen, sowie deren vier mal drei Ankreise.

Gewissermaßen dual zum Feuerbachkreis als Umkreis des Seitenmittendreiecks ist der Spiekerkreis als Inkreis des Seitenmittendreiecks, das Bild des Inkreises des Dreiecks unter der zentrischen Streckung mit dem Schwerpunkt S als Zentrum und dem Faktor -1/2. Der Radius r des Spiekerkreises ist damit die Hälfte des Inkreisradiusses ρ:

$$r = \frac{\Delta}{2s}.$$

Für den Mittelpunkt Sp des Spiekerkreises gilt:

$$Sp = S - \frac{1}{2}(I - S) = \frac{3}{2}S - \frac{1}{2}I = \frac{b+c}{4s}A + \frac{c+a}{4s}B + \frac{a+b}{4s}C,$$

hat also die baryzentrischen Koordinaten $(b + c, c + a, a + b)$. Der Schwerpunkt ist das innere Ähnlichkeitszentrum von Inkreis und Spiekerkreis. Wir bestimmen nun das äußere Ähnlichkeitszentrum N; die Bezeichnung „N“ wird später gerechtfertigt. Wir gewinnen den Punkt N aus der Beziehung:

$$Sp = N + \frac{1}{2}(I - N),$$

aus der folgt

$$N = 2Sp - I = \frac{(s-a)}{s}A + \frac{(s-b)}{s}B + \frac{(s-c)}{s}C;$$

der Punkt N hat also die baryzentrischen Koordinaten $(s-a, s-b, s-c)$. Um eine andere Charakterisierung dieses Punktes zu finden, betrachten wir die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden des Punktes N und der Ecken des Dreiecks mit den jeweiligen Gegenseiten. Für den Schnittpunkt A'' der Geraden AN und BC berechnen wir die baryzentrischen Koordinaten $(0, s-b, s-c)$, also

$$A'' = \frac{s-b}{a} B + \frac{s-c}{a} C .$$

Damit ergeben sich die Abstände des Punktes A'' zu den Ecken B und C:

$$\overline{BA''} = s-c\,,\ \overline{A''C} = s-b.$$

Damit erkennen wir den Punkt A'' als den Punkt, in dem der Ankreis, der die Seite BC von außen berührt, diese Seite berührt. Das könnte eigentlich als bekannt vorausgesetzt werden, soll aber hier doch noch kurz begründet werden. Dazu bezeichnen wir diesen Berührpunkt zunächst mit T_{AA}, die außerhalb des Dreiecks liegenden Berührpunkte mit T_{AB} (auf der Geraden AC) und T_{AC} (auf der Geraden AB). Da die von einem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkt an den Kreis gezogen Tangenten gleichlang sind, haben wir

$$\overline{AB} + \overline{BT_{AA}} = \overline{AB} + \overline{BT_{AC}} = \overline{AT_{AC}} = \overline{AT_{AB}} = \overline{AC} + \overline{CT_{AB}} = \overline{AC} + \overline{CT_{AA}} .$$

Damit haben wir

$$2(\overline{AB} + \overline{BT_{AA}}) = \overline{AB} + \overline{BT_{AA}} + \overline{AC} + \overline{CT_{AA}} = \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB} = a+b+c\,,$$

also

$$c + \overline{BT_{AA}} = s\,,$$

das heißt

$$\overline{BT_{AA}} = s-c\,.$$

Das ist aber genau der Abstand von der Ecke B, den wir früher für den Punkt A'' berechnet haben. Damit gilt – wie behauptet – $\boldsymbol{A''} = \boldsymbol{T_{AA}}$. Definieren wir nun die Berührpunkte $\boldsymbol{T_{BB}}$ und $\boldsymbol{T_{CC}}$ analog zu dem Punkt $\boldsymbol{T_{AA}}$, so haben wir den folgenden Satz, der die Wahl von $\boldsymbol{N}$ als Bezeichnung für das äußere Ähnlichkeitszentrum von Inkreis und Spiekerkreis erklärt:

Satz [Nagel]. *Die Geraden AT_{AA}, BT_{BB} und CT_{CC} sind kopunktal, sie schneiden sich im Punkt N*, dem *Nagel-Punkt* des Dreiecks $[A,B,C]$. *qed*

Dieser Sachverhalt weckt eine andere Assoziation. Wir betrachten die Berührpunkte T_A, T_B, T_C des Inkreises in den Seiten BC, CA beziehungsweise AB. Für ihre Abstände von den Ecken gilt bekanntlich:

$$\overline{AT_B} = s-a\,,\ \overline{AT_C} = s-a\,, \overline{BT_C} = s-b\,, \overline{BT_A} = s-b\,, \overline{CT_A} = s-c\,, \overline{CT_B} = s-c\,.$$

Also ergeben sich die Berührpunkte des Inkreises aus den jeweils zugehörigen Berührpunkten der entsprechenden Ankreise durch Spiegelung am jeweiligen Seitenmittelpunkt. Der Satz von al Mut'aman (und Ceva) liefert ferner, dass die Geraden AT_A, BT_B und CT_C ebenfalls kopunktal sind. Sie schneiden sich im *Gergonne-Punkt* G des Dreiecks.