

Ausgewählte Kapitel aus der Graphentheorie

Kapitel 1

Wiederholung der Grundbegriffe

1.1 Das Königsberger Brückenproblem

Die Graphentheorie hat ihren Ursprung hier am Ort, in dem berühmten *Königsberger Brückenproblem*.



Das Bild zeigt die Stadt Königsberg um 1736; das ist das Jahr, in dem dem großen Leonhard Euler (1707-1783) die Lösung des Königsberger Brückenproblems gelang. Für die Königsberger Bürger war es ein Spiel, einen Spaziergang durch ihre Stadt zu suchen, der über jeder der in diesem Bild gezeigten Brücken genau einmal führt. Euler bewies, dass ein solcher Spaziergang nicht möglich ist. Seine in St. Petersburg erschienene Arbeit

Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis

Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 1736, Band 8 (gedruckt 1741), Seiten 128-140

enthält die ersten Ergebnisse aus der Graphentheorie. Darin behandelt er nicht nur die Lösung des Königsberger Brückenproblems, sondern beweist einen allgemeinen Satz über die Existenz von gewissen mathematischen Objekten, die ihm zu Ehren *Eulerwege* und *Eulerkreise* genannt werden.

Den Inhalt von Eulers Arbeit kann man mit Hilfe der Grundbegriffe der modernen Graphentheorie leicht verstehen.

1.2 Grundbegriffe

Definition 1.2.1 Ein (*allgemeiner*) *Graph* ist ein Tripel $\underline{G} = (V, E, \varphi)$, bestehend aus

- einer endlichen Menge V , deren Elemente *Knoten* (des Graphen \underline{G}) genannt werden,
- einer endlichen Menge E , deren Elemente *Kanten* (des Graphen \underline{G}) genannt werden, und
- einer Abbildung $\varphi : E \rightarrow \text{Pot}V$, wobei $\text{Pot}V$ die Potenzmenge von V , das heißt, die Menge aller Teilmengen von V , bezeichnet; für jede Kante e heißen die Elemente von $\varphi(e)$ *Randknoten* von e ,

derart dass gilt:

1. $V \cap E = \emptyset$ (kein Knoten ist zugleich eine Kante),
2. eine Kante hat entweder einen oder zwei Randknoten; Kanten mit nur einem Randknoten heißen *Schlingen*. Zwei verschiedene Knoten v und w heißen *benachbart* oder *benachbart*, wenn sie Randknoten einer Kante e sind, das heißt, wenn es eine Kante e mit $\varphi(e) = \{v, w\}$ gibt. Ein Knoten v ist *inzident* mit der Kante e oder eine Kante e ist *inzident* mit einem Knoten v , wenn $v \in \varphi(e)$ gilt. Es existieren *Mehrfachkanten*, wenn es verschiedene Kanten – keine Schlingen – gibt, die die gleichen Randknoten haben.

Zwei Graphen $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ und $\underline{\tilde{G}} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{\varphi})$ heißen *isomorph*, wenn es bijektive Abbildungen $f : V \rightarrow \tilde{V}$, $g : E \rightarrow \tilde{E}$ mit $f(\varphi(e)) = \tilde{\varphi}(g(e))$ für alle $e \in E$ gibt; die Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Graphen.

Geometrische Realisierung. Ursprünglich sind Graphen geometrische Objekte. Der Gebrauch des Wortes „Kante“ erinnert noch daran: die Ecken und Kanten eines Polyeders im dreidimensionalen Raum bilden den Urtyp eines Graphen, den *Gerüstgraphen*

des Polyeders. Man kann sich nun umgekehrt jeden Graphen als geometrisches Gebilde im drei-dimensionalen Raum vorstellen und daher rühren manche Sprechweisen, die im folgenden benutzt werden, manchmal ohne im einzelnen erläutert zu werden.

Wir betrachten einen Graphen mit n Knoten und m Kanten, davon s Schlingen und konstruieren eine *geometrische Realisierung*. Dazu wählen wir $n + m + s$ Punkte im Raum, derart dass keine vier in einer Ebene liegen. Diese garantiert, dass je vier Punkte ein räumliches Viereck bilden, bei dem jede Seite disjunkt zu ihrer Gegenseite ist. Jedem Knoten identifizieren wir mit einem der gewählten Punkte; damit haben wir n Punkte verbraucht. Für jede Kante, die keine Schlinge ist, nehmen wir einen weiteren der gewählten Punkte und identifizieren die Kante mit dem Streckenzug, aus den beiden Strecken, die die Randknoten der Kante mit dem gewählten Punkt verbinden. Für die Realisierung einer Schlinge nehmen wir zwei der gewählten Punkte und identifizieren die Schlingen mit dem Rand des aus diesen beiden Punkten und dem einzigen Randknoten gebildeten Dreiecks.

Aufgabe. Man entwickle einen Algorithmus, der n Punkte in \mathbb{R}^3 (zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 4$) angibt, derart dass keine 4 dieser Punkte in einer Ebene liegen.

Ein Student der Kant-Universität hat folgende verblüffend einfache Lösung abgegeben. Man nehme die n Punkte

$$P_k = \begin{pmatrix} k \\ k^2 \\ k^3 \end{pmatrix}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Vier solche Punkte $P_{k_0}, P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_3}$ liegen genau dann nicht in einer Ebene, wenn die Vektoren $P_{k_1} - P_{k_0}, P_{k_2} - P_{k_0}, P_{k_3} - P_{k_0}$ linear unabhängig sind, also die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} k_1 - k_0 & k_2 - k_0 & k_3 - k_0 \\ k_1^2 - k_0^2 & k_2^2 - k_0^2 & k_3^2 - k_0^2 \\ k_1^3 - k_0^3 & k_2^3 - k_0^3 & k_3^3 - k_0^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_0^2 & k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \\ k_0^3 & k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Es handelt sich hierbei aber um die berühmte *Vandermondesche* Determinante, für die gilt:

$$D = \prod_{0 \leq i < j \leq 3} (k_j - k_i),$$

und die damit nur dann verschwindet, wenn zwei der Werte k_j einander gleich sind.

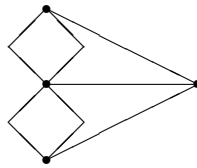
Im dreidimensionalen Raum ist das alles sehr einfach zu erreichen, da es durch jeden Punkt unendlich viele Ebenen gibt, also große Freiheit für die Wahl der endlich vielen benötigten Punkte herrscht. Nun ist man aber auch an zwei-dimensionalen Darstellungen interessiert. Solche gewinnt man ganz einfach durch eine geeignete Projektion des dreidimensionalen Gebildes in eine Ebene. Allerdings werden dabei Überkreuzungen auftreten,

das heißt, zwei Streckenzüge, die verschiedene Kanten darstellen, werden gemeinsame innere Punkte haben, was für das Verständnis störend wirkt. Die Theorie der *planaren* Graphen, das heißt, der Graphen, die sich kreuzungsfrei in der Ebene *realisieren* lassen, wird im nächsten Kapitel behandelt. Bei Gerüstgraphen konvexer Polyeder liefert häufig die stereographische Projektion überkreuzungsfreie Bilder. Man wählt ein Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Inneren des konvexen Körpers liegt und die positive z -Achse weder einen Knoten enthält noch eine Kante schneidet. Dann projiziert man den Gerüstgraphen zunächst vom Ursprung aus auf die Einheitskugel und dann vom Nordpol auf die xy -Ebene. Kanten können dabei in Kreisbögen abgebildet werden. Der im nächsten Kapitel behandelte Satz von Wagner und Fáry liefert aber, dass man diese Kanten auch noch gerade ziehen kann.

Aufgabe. Zeichnen Sie überkreuzungsfreie ebene Realisierungen der Gerüstgraphen der platonischen Körper.

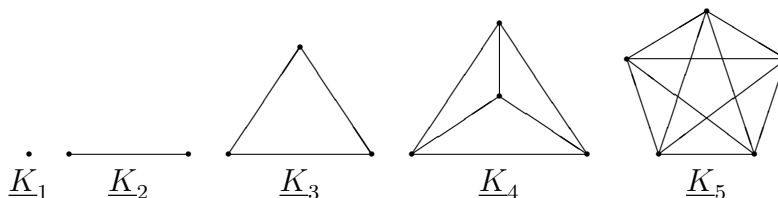
Beispiele 1.2.2 1. Dem Königsberger Brückenproblem wird folgender Graph \underline{K}_{bg} zugeordnet:

- Knoten sind die vier Stadtteile, in die Königsberg durch das Flusssystem des Pregels zerlegt wird,
- Kanten sind die sieben Brücken,
- Randknoten einer Kante sind die Stadtteile, die diese Brücke verbindet.



2. Jeder natürlichen Zahl n wird der *vollständige* Graph \underline{K}_n zugeordnet:

- die Menge der Knoten ist eine beliebige Menge V mit n Elementen,
- die Menge Kanten E ist die Menge der zweielementigen Teilmengen von V , also eine Teilmenge von $\text{Pot}V$,
- φ ist die Inklusion von E in $\text{Pot}V_n$.

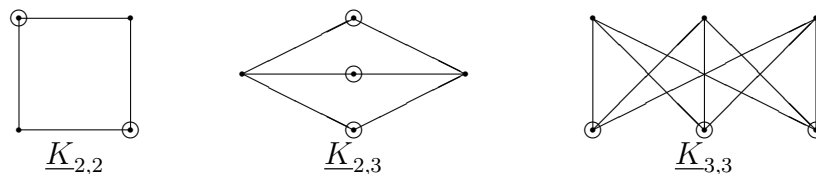


Dieser Graph ist durch die Zahl n bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Er besitzt n Knoten und $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Kanten. Wir werden später sehen, dass sich der vollständige Graph \underline{K}_5 nicht überkreuzungsfrei in die Ebene einbetten lässt.

Im Raum lassen sich diese Graphen einfacher realisieren als im allgemeinen Fall: Man wählt nur n Punkte, derart dass keine vier in einer Ebene liegen, als Realisierung der Knoten und die Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte als Realisierung der Kanten. Der vollständige Graph \underline{K}_5 besitzt eine besonders symmetrische Realisierung dieser Art: Man ergänzt ein Dreieck nach beiden Seiten (im Raum) zu regulären Tetraedern (dreiseitigen) Pyramiden; der Gerüstgraph enthält neun Kanten. Dann nimmt man als zehnte Kante die Verbindungsstrecke der Spitzen hinzu.

3. Jedem Paar m und n natürlicher Zahlen wird der *vollständige bipartite Graph* $\underline{K}_{m,n} = (V_{m,n}, E_{m,n}, \varphi_{m,n})$ zugeordnet. Dazu wählt man zwei disjunkte Mengen W und V mit m beziehungsweise n Elementen und setzt

- $V_{m,n} = W \cup V$, die (disjunkte) Vereinigung von W und V ,
- $E_{m,n} = W \times V$, das kartesische Produkt von W und V ,
- $\varphi_{m,n}(e) = \{w, v\}$ für alle $e = (w, v) \in E_{m,n}$.



Legende: \bullet Knoten in W , \odot Knoten in V .

Dieser Graph ist durch die Zahlen m und n bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Er besitzt $m + n$ Knoten und $m \cdot n$ Kanten. Wir werden später sehen, dass sich der vollständige Graph $\underline{K}_{3,3}$ nicht überkreuzungsfrei in die Ebene einbetten lässt.

In \mathbb{R}^3 haben die bipartiten Graphen eine einfache Realisierung. Man wählt zwei windschiefe Geraden g und k , dann m Punkte w_1, w_2, \dots, w_m auf g als Realisierung der Knoten in W und n Punkte v_1, v_2, \dots, v_n auf h als Realisierung der Knoten in V . Dann kann man die Kanten durch die Verbindungsstrecken $[w_i, v_j]$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ realisieren. Für den Graphen $\underline{K}_{3,3}$ gibt es eine schöne geometrische Realisierung. Wir erhalten sie durch eine geeignete Zerlegung der Menge der Ecken des von den Basisvektoren und ihren additiven Inversen

aufgespannten Oktaeders:

$$\begin{aligned} W &= \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0)\} \\ V &= \{(0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0)\} \end{aligned}$$

Mehr als Kuriosität sei notiert: $\underline{K}_{1,1} \cong \underline{K}_2$.

Die allgemeine Definition sei hier angefügt: Ein Graph $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ heißt *bipartit*, wenn sich die Knotenmenge V so in zwei Teilmengen U und W zerlegen lässt, dass jede Kante einen Knoten in U und einen Knoten in W hat.

Als Aufgabe überlege man, dass der Gerüstgraph eines Würfels bipartit ist.

4. Sonderfälle sind die *kantenlosen* Graphen, das heißt, die Graphen, deren Kantenmenge leer ist, und der *leere Graph*, bei dem nicht nur die Kantenmenge, sondern auch die Eckenmenge leer ist.

Definition 1.2.3 Es seien $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ ein Graph und v ein Knoten von \underline{G} . Der *Grad* $\deg v$ des Knotens v ist die Anzahl der Kanten, zu deren Randknoten v gehört, plus die Anzahl der Schlingen, deren einziger Randknoten v ist:

$$\deg v = \#\{e \in E \mid v \in \varphi(e)\} + \#\{e \in E \mid \varphi(e) = \{v\}\};$$

Schlingen werden also doppelt gezählt.

Ein Knoten v mit $\deg v = 0$ heißt *isoliert*.

Diese Definition ist so gefasst, damit der folgende Satz gilt:

Satz 1.2.4 Für jeden Graphen $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ gilt:

1. Die Summe aller Knotengrade ist eine nicht-negative gerade Zahl, genauer, das Doppelte der Anzahl der Kanten:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot \#E.$$

2. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist ebenfalls nicht-negative gerade Zahl.

Beweis. 1. Bei der Summation der Grade über alle Knoten wird jede Kante genau zweimal gezählt.

2. Da die Gesamtsumme gerade ist, muss die Zahl ungerader Summanden gerade sein. \square

Beispiel 1.2.5 Der dem Königsberger Brückenproblem zugeordnete Graph \underline{Kbg} hat einen Knoten vom Grad 5 und drei Knoten vom Grad 3. Die Summe aller Knotengrade ist 14 und die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist 4, beides - wie es aufgrund des Satzes sein muss - gerade Zahlen.

Aufgabe. Man bestimme die Grade der Knoten in den übrigen Fällen von Beispiel 1.2.2.

Bezeichnung. Abstrakt gesehen ist der Grad eine Abbildung von der Knotenmenge eines Graphen $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ in die Menge \mathbf{N}_0 der nicht-negativen ganzen Zahlen:

$$\text{deg} : V \rightarrow \mathbf{N}_0, \quad v \mapsto \text{deg } v.$$

Es kommt gelegentlich vor, dass die gleiche Knotenmenge in verschiedenen Graphen betrachtet wird. Dann bezeichnet man diese Funktion zur Klarstellung durch

$$\text{deg}_{\underline{G}}.$$

Definition 1.2.6 Es sei $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ ein Graph.

- Ein *Kantenzug* (in \underline{G}) ist eine endliche alternierende Folge

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_3, \dots, e_n, v_n)$$

von Knoten v_j und Kanten e_i mit $\varphi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Es handelt sich um einen Kantenzug mit dem *Anfangsknoten* v_0 und dem *Endknoten* v_n , einen Kantenzug *von* v_0 *nach* v_n .

- Ein solcher Kantenzug ist *geschlossen*, wenn $v_0 = v_n$ ist.
- Ein *Kantenweg* ist ein Kantenzug, in dem jede Kante nur einmal vorkommt, für den also mit den vorherigen Bezeichnungen gilt:

$$e_{i_1} \neq e_{i_2}$$

falls $i_1 \neq i_2$.

- Die *Länge* eines Kantenweges ist die Anzahl der in ihm auftretenden Kanten, also mit den vorherigen Bezeichnungen die Zahl n .
- Ein Kantenweg heißt *einfach*, wenn jeder Knoten nur einmal vorkommt.
- Ein *Eulerweg* ist ein Kantenweg, der alle Kanten des Graphen \underline{G} enthält.
- Ein *Kreis* ist ein geschlossener Kantenweg.

- Ein Kreis heißt *einfach*, wenn - als Teilgraph betrachtet - jeder Knoten den Grad 2 hat.
- Ein *Eulerkreis* ist ein Kreis, der alle Kanten des Graphen \underline{G} enthält.
- Ein Kreis ist *einfach*, wenn die auftretenden Ecken paarweise verschieden sind (bis auf $v_0 = v_n$), das heißt, wenn in der angegebenen Darstellung gilt: $v_i \neq v_j$ für $0 \leq i < j < n$.
- Ein *Hamiltonkreis* ist ein Kreis, der jede Ecke des Graphen \underline{G} genau einmal enthält¹.
- Der Graph \underline{G} ist *zusammenhängend*, wenn es zu je zwei verschiedenen Knoten v und w einen Kantenzug von v nach w gibt.

Damit erhält das Königsberger Brückenproblem die folgende graphentheoretische Fassung:

Gibt es in dem dem Königsberger Brückenproblem zugeordneten Graphen \underline{Kbg} einen Eulerweg oder sogar einen Eulerkreis?

Die negative Antwort ergibt sich aus den folgenden Sätzen.

1.3 Die Eulerschen Sätze

Satz 1.3.1 (Euler 1736) *Ein zusammenhängender Graph mit mehr als einem Knoten besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn alle Knotengrade gerade sind.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Es sei $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ ein zusammenhängender Graph, der einen Eulerkreis $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$ (mit $v_0 = v_n$) besitzt. Da der Graph \underline{G} zusammenhängend ist, ist jeder Knoten Randpunkt mindestens einer Kante; also haben alle Knoten positiven Grad. Da in einem Eulerkreis alle Kanten und mit jeder Kante ihre Randpunkte auftreten, treten auch alle Knoten auf. Wir entfernen nun alle Schlingen, das heißt, wir bilden den Graphen $\underline{G}' = (V, E', \varphi')$ mit

$$\begin{aligned} E' &= E \setminus \{e \in E \mid e \text{ Schlinge}\}, \\ \varphi' &= \varphi|_{E'}. \end{aligned}$$

Die Graphen \underline{G} und \underline{G}' haben die gleichen Knoten; allerdings können sich deren Grade unterscheiden, je nachdem sie in dem einen oder in dem anderen Graphen betrachtet

¹benannt nach SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (* Dublin 4. 8. 1805, † Dunsink 2. 9. 1865) genialer Mathematiker, Physiker, Astronom.

werden. Der Unterschied ist aber immer eine gerade Zahl, das doppelte der Anzahl der Schlingen in \underline{G} , die den gerade betrachteten Knoten zum Randknoten haben. Also genügt es, die Behauptung für den ebenfalls zusammenhängenden Graphen \underline{G}' zu beweisen. Auch aus dem gegebenen Eulerkreis in dem Graphen \underline{G} kann man problemlos alle Schlingen (und den darauf folgenden Randknoten) entfernen und erhält damit einen Eulerkreis in dem Graphen \underline{G}' . Nun überlegt man: Der Knoten $v_0 = v_n$ ist Randknoten der Kanten e_1 und e_n sowie eventuell weiterer Kantenpaare $\{e_{j-1}, e_j\}$, wobei aber verschiedene solche Kantenpaare nach dem Entfernen der Schlingen disjunkt sind. Also hat er geraden Grad. Die übrigen Knoten sind Randknoten von einer gewissen Zahl von paarweise disjunkten Kantenpaaren $\{e_{j-1}, e_j\}$, haben also ebenfalls geraden Grad.

„ \Leftarrow “: Es ist die Existenz eines Eulerkreises in einem Graphen \underline{G} zu zeigen, der die gegebenen Voraussetzungen erfüllt. Dies geschieht zunächst in einer mehr anschaulichen Weise und wird später zu einem Algorithmus formalisiert.

Wieder kann man sich auf den Fall beschränken, dass der Graph \underline{G} keine Schlingen enthält. Ist in einem solchen Graphen der Eulerkreis gefunden, so enthält er – wie eben schon bemerkt – alle Knoten und an jedem Knoten lassen sich Schlingen problemlos einfügen.

Nun sei v ein beliebiger Knoten. Man setzt $v_0 = v$ und wählt eine Kante e_1 , zu deren Randknoten v_0 gehört. Es sei v_1 der zweite Randknoten der Kante e_1 . Da der Grad von v_1 gerade ist, findet man eine von e_1 verschiedene Kante e_2 , die ebenfalls v_1 als einen Randknoten hat. Nun nimmt man den zweiten Randknoten v_2 von e_2 und eine zugehörige Kante e_3 . Das Verfahren kann man fortsetzen, es muss aber nach endlich vielen Schritten aufhören; das ist aber nur möglich, wenn man wieder bei dem Knoten v angekommen ist und dort alle Kanten verbraucht sind.

Enthält so gefundene Kreis $\underline{K} = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$ mit $v_n = v_0 = v$ alle Kanten des Graphen \underline{G} , so ist man fertig. Wenn es noch Kanten gibt, die nicht erfasst sind, so zeigt man, dass man diesen Kreis verlängern kann. Da nur endlich viele Kanten vorhanden sind, muss man nach endlich vielen Verlängerungen alle Kanten erfasst haben.

Die Verlängerung erhält man folgendermaßen. Es sei w ein Randknoten einer noch nicht erfassten Kante e . Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Knoten w kommt in dem Kreis \underline{K} vor, $w = v_j$ für ein $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$; da der Kreis \underline{K} nicht über v hinaus verlängert werden kann, treten alle Kanten mit v als Randpunkt bereits auf. Dann wird ein Kreis $(v'_0, e'_1, v'_1, e'_2, v'_2, \dots, e'_{n'}, v'_{n'})$ folgendermaßen konstruiert. Man setzt zunächst $v'_0 = w = v_j$ und $e'_1 = e$. Der Knoten v'_1 ist der zweite Randknoten von e und man findet, weil v'_1 geraden Grad hat, eine weitere unbenutzte Kante e'_2 mit v'_1 als Randpunkt. Dies kann man solange fortsetzen, bis

man wieder bei $w = v'_{n'}$) gelangt ist und dort alle Kanten verbraucht sind. Den gefundenen Kreis kann man nun in der zunächst angegebenen Kantenweg einfügen:

$$(v_0, e_1, v_1, \dots, v_j = w = v'_0, e'_1, v'_1, e'_2, v'_2, \dots, e'_{n'}, v'_{n'} = w = v_j, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n)$$

und hat damit die Vergrößerung erreicht.

2. Der Knoten w kommt nicht in dem Kreis \underline{K} vor. Da der Graph \underline{G} zusammenhängend ist, gibt es einen Kantenweg \underline{W} von v_0 nach w . In \underline{W} finden wir eine erste Kante e , die nicht in \underline{K} vorkommt; da alle Kanten mit v als Randknoten in \underline{K} vorkommen, kann v kein Randknoten von e sein. Der Knoten w' , den e mit der in \underline{W} vorhergehenden Kante gemeinsam hat gehört zu \underline{K} . Deshalb kann man den Kreis \underline{K} wie im ersten Fall um einen Kreis vergrößern, der den Knoten w' enthält. \square

Satz 1.3.2 (Euler 1736) *Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen Eulerweg, dessen Anfangsknoten vom Endknoten verschieden ist, wenn es genau zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.*

Beweis. Es sei $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Knoten. „ \Rightarrow “: Man wählt einen Eulerweg $\underline{W} = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$ mit $v_0 \neq v_n$, den es ja nach Voraussetzung gibt. Da \underline{W} alle Kanten enthält, kommen auch alle Knoten in \underline{W} vor. Wir bilden einen neuen Graphen \underline{G}' durch Hinzunahme einer Kante e' mit den Randknoten v_0 und v_n . Dann ist $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n, e', v_0)$ ein Eulerkreis in \underline{G}' und damit haben nach dem vorhergehenden Satz alle Knoten in \underline{G}' geraden Grad. Damit haben in dem gegebenen Graphen \underline{G} die Knoten v_0, v_n ungeraden, alle anderen geraden Grad.

„ \Leftarrow “: Nun ist vorausgesetzt, dass genau zwei Knoten, v und w , mit ungeradem Grad vorhanden sind. Wir bilden wieder einen neuen Graphen \underline{G}' durch Hinzunahme einer Kante e' mit den Randknoten v und w . Nach dem vorhergehenden Satz gibt es einen Eulerkreis $\underline{K}' = (v'_0, e'_1, v'_1, e'_2, v'_2, \dots, e'_{n'}, v'_{n'})$ in \underline{G}' mit $v'_0 \neq v'_{n'}$. Dabei ist $e' = e'_j$ für genau ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ und wir finden den Eulerweg

$$(v'_j, e'_{j+1}, \dots, e'_{n'}, v'_{n'} = v'_0, e'_1, \dots, e'_{j-1}, v'_{j-1}),$$

der von v und w verbindet. \square

Der eben geführte Beweis zeigt noch

Zusatz. Ist \underline{G} ein zusammenhängender Graph mit genau zwei Knoten ungeraden Grades, so sind dies die Anfangs- und Endknoten der möglichen Eulerwege. \square

Zusammenfassung. *Ein zusammenhängender Graph mit mehr als einem Knoten besitzt genau dann einen Eulerweg, wenn alle Knotengrade gerade sind oder genau zwei Knoten ungeraden Grad haben.*

Genau einen Knoten mit ungeradem Grad kann es nach Satz 1.2.4 in einem Graphen nicht geben.

Anwendung. Das Königsberger Brückenproblem besitzt keine Lösung, da in dem zugehörigen zusammenhängenden Graphen Kbg alle vier Knoten ungeraden Grad haben (siehe Beispiel 1.2.5).

1.4 Ein Algorithmus zur Konstruktion von Eulerwegen

Ein wesentliches Anliegen der Graphentheorie ist es, die untersuchten Objekte algorithmisch zu konstruieren, so dass man sie schließlich automatisch mit einem Computer erzeugen kann.

Im folgenden soll ein Algorithmus angegeben werden, der zu einem zusammenhängenden Graphen mit mehr als einem Knoten, aber höchstens zwei Knoten ungeraden Grades einen Eulerweg erzeugt. Die vorangehenden Sätze sichern die Existenz eines Eulerweges, das Verfahren muss also, wenn es korrekt ist, zum Ziel führen.

Der im folgenden dargestellte Algorithmus geht im wesentlichen auf Carl Hierholzer (1840-1871) zurück, der 1865 in Heidelberg bei dem aus Königsberg und der Königsberger mathematischen Schule stammenden Otto Ludwig Hesse (1811-1874) promoviert hat.

Zunächst einmal ist zu klären, wie ein gegebener Graph $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ in computergerechter Weise beschrieben werden kann. Wir betrachten einen Graphen mit n Knoten, die wir durch Symbole v_1, v_2, \dots, v_n darstellen, m Kanten e_1, e_2, \dots, e_m . Da die Knoten und Kanten nacheinander dem Computer eingegeben werden, betrachten wir die Gesamtheiten der Knoten und Kanten für dieses Programm nicht als Mengen, sondern als Tupel (endliche Folgen), wofür wir den in der Computersprache üblichen Ausdruck *Listen* benutzen werden. Also haben wir

$$\begin{aligned} V &= (v_1, v_2, \dots, v_n), \\ E &= (e_1, e_2, \dots, e_m) \end{aligned}$$

Für jeden Knoten v_j definieren wir die *Inzidenzliste* a_j also Teilliste der Liste E , die aus den Kanten e_i besteht, zu deren Randknoten der Knoten v_j gehört. Auch diese Listen

werden am Anfang dem Computer eingegeben. Die Liste der Knoten zusammen mit allen Inzidenzlisten beschreiben den Graphen vollständig. Die Inzidenzlisten werden in einer Liste A zusammengefasst:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Eine beliebige Kante finden wir in mindestens einer und höchstens zwei Inzidenzlisten; genau dann, wenn sie in genau einer Inzidenzliste vorkommt, handelt es sich um eine Schlinge.

Der zu beschreibende Algorithmus setzt sich auch verschiedenen Prozeduren zusammen. Wir programmieren in dem Computeralgebrasystem Maple.

Als erstes benötigen wir die einfache Prozedur `indces`, die herausfindet, an welcher Stelle ein Element in einer Liste vorkommt:

```
indces:=proc(v,c)
  local m, mv;
  for m to nops(c) do
    if c[m]=v then mv:=m end if
  end do;
  nv
end proc;
```

Wenn ein Element mehrfach in einer Liste vorkommt, wird dabei die letzte Stelle angegeben, an der es auftritt.

Die nächste Prozedur `endknoten` stellt fest, ob ein Knoten v ein Randknoten der Kante e ist, das heißt, ob die Kante e in der zum Knoten v gehörenden Inzidenzliste vorkommt, und gibt gegebenenfalls einen Knoten aus, der entweder der zweite Randknoten von e oder – im Fall einer Schlinge – mit v übereinstimmt.

```
endknoten:= proc(e,v)
  local endk, k, m, nk, nm, nv;
  global A, n, V;
  nv:=indces(v,V);
  if member(e,A[nv])=false then
    printf("v%d ist nicht Randknoten von %a", nv, e)
  else
    for m from nv+1 to nv+n do
      if m>n then k:=m-n else k:=m end if;
```

```

    nk:=nops(A[k]):
    for nm to nk do
        if A[k][nm]=e then endk:=V[k]; m:=nv+n; break end if
    end do;
    endk
end do
end if
end proc:

```

Nun konstruieren wir in der Prozedur `kreis` einen Kreis, beginnend an einem vorgegebenen Knoten, aus den noch zur Verfügung stehenden Kanten.

```

kreis:=proc(v::symbol)
    local e, w, nn, nv, nw;
    global B, K, L, V, n;
    w:=v; K:=[w];
    nv:=indces(w,V);
    while B[nv]<>[] do
        e:=B[nv][1];
        for nn to n do
            if member(e,B[nn])=true then
                nw:=indces(e,B[nn]);
                B[nn]:=subsop(nw=NULL,B[nn])
            end if
        end do;
        w:=endknoten(e,w);
        nv:=indces(w,V);
        if member(w,L)=false and B[nv]<> [] then L:=[op(L),w] end if;
        K:=[op(K),e,w]
    end do;
    K
end proc:

```

Dies alles fassen wir nun zusammen in der Prozedur `eulerweg`, die ausgehend von einem geeignet zu wählenden Startknoten – gegebenenfalls einem Knoten mit ungeradem Grad – einen Eulerweg oder Eulerkreis ermittelt.

```

eulerweg:=proc(VV::list,EE::list)

```

```

local KK, w;
global B, K, KK, L;
B:=A; K:=[VV[1]]; L:=[VV[1]];
kreis(VV[1]);
KK:=K;
while L<>[VV[1]] do
  w:=L[nops(L)];
  L:=subsop(nops(L)=NULL,L);
  kreis(w);
  KK:=subsop(indces(w, KK)=op(K), KK)
end do;
KK
end proc:

```

Damit ist das zunächst gesteckte Ziel erreicht. Man kann den Algorithmus allerdings noch um einige Schritte erweitern, etwa wie in der folgenden Aufgabe beschrieben.

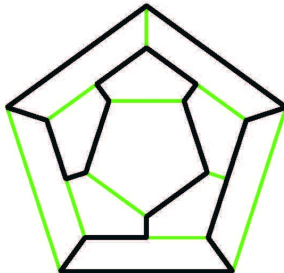
Aufgabe. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der nach beliebiger Eingabe von Listen V , E , a_j überprüft, ob damit ein Graph beschrieben wird. Außerdem soll überprüft werden, ob dieser Graph die Voraussetzungen eines der Eulerschen Sätze erfüllt, und im Fall des Satzes 1.3.2 soll ein Knoten mit ungeradem Grad als Startknoten ausgegeben werden.

1.5 Hamiltonkreise

Die Namensgebung beruht auf dem von Hamilton erfundenen „Icosian Game“. Das Spielfeld ist der Dodekaedergraph mit seinen 20 Knoten.



Die mit den Zahlen 1 bis 20 nummerierten Spielsteine sind so auf Knoten zu setzen, dass diese Knoten zusammen mit den je zwei aufeinanderfolgende Spielsteine verbindenden Kanten (1 folgt auf 20) einen Hamiltonkreis bilden. Das folgende Bild zeigt eine mögliche Lösung.



Leider gibt für die Existenz von Hamiltonkreisen bisher noch keine notwendige und hinreichende Bedingung wie für Eulerkreise. Offensichtlich gilt:

Satz 1.5.1 Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ besitzt der vollständige Graph \underline{K}_n einen Hamiltonkreis.

Beweis. Nehmen wir die natürlichen Zahlen von 1 bis n als Knoten, so ist

$$(1, \{1, 2\}, 2, \{2, 3\}, 3, \dots, n-1, \{n-1, n\}, n, \{n, 1\}, 1)$$

ein Hamiltonkreis in \underline{K}_n . □

Bemerkung. Der vollständig bipartite Graph $\underline{K}_{m,n}$ besitzt genau dann einen Hamiltonkreis, wenn $m = n \geq 2$ gilt. Es sei $V_{m,n} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, $E_{m,n} = \{(a_i, b_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$. Ist $m = n$, so ist

$$(a_1, (a_1, b_1), b_1, (a_2, b_1), a_2, (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m), b_m, (a_1, b_m), a_1)$$

ein Hamiltonkreis. Ist aber etwa $m < n$, so können in einem einfachen Kreis Knoten der Form b_j nur von Knoten der Form a_i aus erreicht werden, also höchstens m Knoten der Form b_j auftreten; also gibt es keinen einfachen Kreis, der alle Knoten enthält.

Man philosophiere über den Sonderfall $m = n = 1$!

Ansonsten kennt man nur zahlreiche hinreichende Bedingungen; die meisten sind Folgerungen aus einem von dem Franzosen J. Adrian Bondy und dem derzeit an der Rutgers University in New Jersey lehrenden Tschechen Vašek Chvátal gefundenen Satz. Bei der Suche nach Hamiltonkreisen sind Mehrfachkanten und Schlingen irrelevant.

Definition 1.5.2 Ein Graph heißt *schlicht*, wenn

1. jede Kante genau zwei Randknoten hat – keine Schlingen existieren – und

2. je zwei Knoten durch höchstens eine Kante verbunden sind – keine Mehrfachkanten existieren.

Ein schlichter Graph ist bis auf Isomorphie durch die Menge der Knoten und die Menge der (ungeordneten) Paare benachbarter Knoten bestimmt. Wir schreiben einen schlichten Graphen deswegen einfach in der Form $\underline{G} = (V, E)$, wobei E eine Menge von zweielementigen Teilmengen von V ist. Ein schlichter Graph mit n Knoten kann aus dem vollständigen Graphen \underline{K}_n durch Weglassen von Kanten gewonnen und entsprechend einfach im \mathbb{R}^3 realisiert werden.

Beispiel 1.5.3 *Die Gerüstgraphen von Polyedern sind schlichte Graphen.*

Für den Satz von Bondy und Chvátal benötigen wir noch eine graphentheoretische Konstruktion.

Definition 1.5.4 Ein schlichter Graph $\underline{G} = (V, E)$ heißt *abgeschlossen*, wenn für je zwei nicht benachbarte Knoten v und w gilt:

$$\deg v + \deg w < \#V.$$

Beispiel 1.5.5 1. *Die vollständigen Graphen \underline{K}_n sind abgeschlossen, denn es gibt keine nicht benachbarten Knoten.*

2. *Die vollständig bipartiten Graphen $\underline{K}_{m,n}$ mit $m + n > 3$ sind nicht abgeschlossen. Um das einzusehen, sei o.B.d.A. $m \leq n$. Dann gibt es nicht benachbarte Knoten vom Grad m und nicht benachbarte Knoten vom Grad n . Für zwei Knoten v und w des zweiten Typs gilt:*

$$\deg v + \deg w = 2 \cdot n \geq m + n = \#V.$$

Zu einem schlichten Graphen $\underline{G} = (V, E)$ konstruieren wir ein folgender Weise einen ihn enthaltenden abgeschlossenen Graphen $[\underline{G}] = (V, \bar{E})$, einen (nicht notwendig eindeutig bestimmten) *Abschluss* von \underline{G} . Ist \underline{G} selbst schon abgeschlossen, so setzen wir $[\underline{G}] = \underline{G}$. Andernfalls wählen wir ein Paar nicht benachbarter Knoten v und w , derart dass gilt:

$$\deg v + \deg w \geq \#V$$

und bilden den Graphen $\underline{G}_1 = (V, E_1, \varphi)$ durch Hinzunahme der Kante $\{v, w\}$, das heißt, es wird

$$E_1 = E \cup \{\{v, w\}\}$$

gesetzt. Bei dieser Erweiterung bleiben die Knotenzahl und Grade der von v und w verschiedenen Knoten unverändert. Ist \underline{G}_1 abgeschlossen, so nehmen wir $[\underline{G}] = \underline{G}_1$ und sind fertig. Falls nicht, existiert wieder ein Paar nicht benachbarter Knoten, derart dass die Summe der Grade größer-gleich der Gesamtzahl der Knoten ist, und wir nehmen dieses Paar als neue Kante hinzu. Dies Verfahren setzen wir fort, bis wir einen abgeschlossenen Graphen erhalten haben. Bei jeder Hinzunahme einer Kante vermindert sich die Anzahl nicht-benachbarter Knotenpaare um eins, also muss das Verfahren abbrechen, möglicher Weise erst, wenn der vollständige Graph $K_{\#V}$ erhalten wurde. Besitzt der Graph \underline{G} einen Hamiltonkreis, so ist dieses offensichtlich auch ein Hamiltonkreis in jedem Abschluss $[\underline{G}]$ von \underline{G} . Eine wichtige hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises ist nun die Umkehrung dieser Aussage.

Satz 1.5.6 (Bondy und Chvátal 1976) *Besitzt ein Abschluss $[\underline{G}]$ eines schlichten Graphen \underline{G} einen Hamiltonkreis, so besitzt auch der Graph \underline{G} selbst einen Hamiltonkreis.*

Beweis. Der Graph $[\underline{G}]$ wird schrittweise aus dem Graphen \underline{G} konstruiert. Rückwärts gehend wird dann nachgewiesen, dass die Existenz eines Hamiltonkreises in dem Graphen eines Zwischenschrittes die Existenz in dem vorher gehenden Graphen zur Folge hat. Das heißt, es genügt zu zeigen: *Besitzt der zur Konstruktion von $[\underline{G}]$ benutzte Graph \underline{G}_1 einen Hamiltonkreis, so gilt dies auch für den Graphen \underline{G} selbst.*

Dazu sei $\underline{K}_1 = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$ ein Hamiltonkreis in \underline{G}_1 ; damit gilt $\#V = n$. Enthält dieser Hamiltonkreis die Kante $\{v, w\}$ nicht, wobei v und w die nicht benachbarten Knoten in \underline{G} bezeichnen, die durch eine Kante in \underline{G}_1 verbunden sind, so handelt es sich um einen Hamiltonkreis in \underline{G} . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir deshalb $v_0 = v_n = v$ und $v_{n-1} = w$ annehmen. Dann ist $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{n-1}, v_{n-1})$ ein Kantenzug von v nach w in \underline{G} , der alle Knoten von \underline{G} enthält. Wir bilden jetzt die folgenden Indexmengen

$$\begin{aligned} U_v &= \{j \mid 2 \leq j \leq n-2 \text{ und } \{v_j, v\} \in E\}; \\ U_w &= \{j \mid 2 \leq j \leq n-2 \text{ und } \{v_{j-1}, w\} \in E\}. \end{aligned}$$

Der Knoten v ist Randknoten der Kante $e_1 = \{v, v_1\}$ und der Kanten $\{v_j, v\}$ mit $j \in U_v$; also gilt

$$\#U_v = \deg v - 1.$$

Der Knoten w ist Randknoten der Kante $e_{n-1} = \{v_{n-2}, w\}$ und der Kanten $\{v_{j-1}, w\}$ mit $j \in U_w$; also gilt

$$\#U_w = \deg w - 1.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$\deg v + \deg w - 2 = \#U_v + \#U_w = \#(U_v \cup U_w) + \#(U_v \cap U_w) \leq n - 3 + \#(U_v \cap U_w).$$

Nach der Wahl von v und w gilt:

$$\deg v + \deg w \geq n,$$

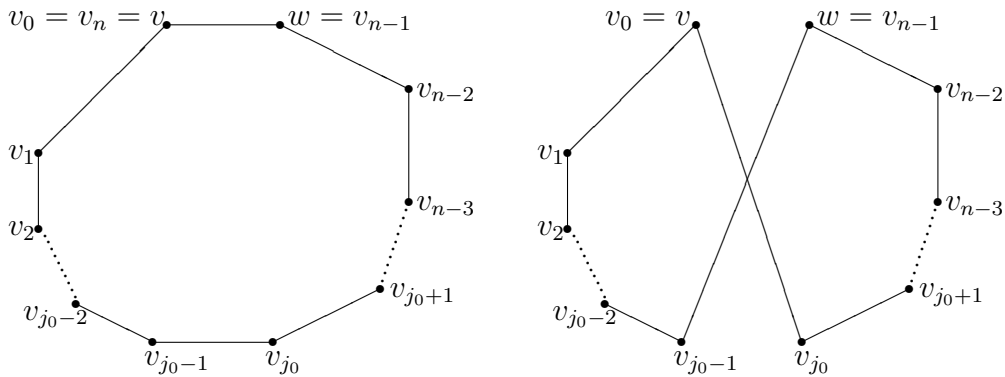
was auf die Ungleichungen

$$\begin{aligned} n - 2 &\leq n - 3 + \#(U_v \cap U_w), \\ 1 &\leq \#(U_v \cap U_w) \end{aligned}$$

führt. Damit ist $U_v \cap U_w \neq \emptyset$. Wir wählen $j_0 \in U_v \cap U_w$ und

$$\underline{K} = (v, \{v, v_{j_0}\}, v_{j_0}, e_{j_0+1}, \dots, e_{n-1}, w, \{w, v_{j_0-1}\}, e_{j_0-1}, v_{j_0-2}, e_{j_0-2}, \dots, e_1, v)$$

ist ein Hamiltonkreis in \underline{G} .



□

Der Satz von Bondy und Chvátal ist sehr technisch, erlaubt aber interessante Folgerungen, die als früher als eigenständige Sätze von dem bedeutenden norwegischen Graphentheoretiker Öystein Ore (1899-1968) und dem aus Ungarn stammenden Weltenbummler Gabriel Andrew (Gabor) Dirac (1925-1984) – nicht zu verwechseln mit seinem Stiefvater, dem Physiker Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) – bewiesen wurden.

Folgerung 1.5.7 (Ore 1960) *Ein schlichter Graph \underline{G} mit n Knoten, derart dass für je zwei nicht-benachbarte Knoten v und w die Ungleichung*

$$\deg v + \deg w \geq n \tag{1.1}$$

erfüllt ist, besitzt einen Hamiltonkreis.

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist der Abschluss $[\underline{G}]$ des Graphen \underline{G} eindeutig bestimmt; $[\underline{G}]$ ist isomorph zu dem vollständigen Graphen \underline{K}_n , besitzt also einen Hamiltonkreis (Satz 1.5.1). Damit besitzt auch \underline{G} aufgrund des Satzes von Bondy und Chvátal (Satz 1.5.6) einen Hamiltonkreis. \square

Folgerung 1.5.8 (Dirac 1952) *Ein schlichter Graph \underline{G} mit n Knoten, derart dass für jeden Knoten v die Ungleichung*

$$\deg v \geq \frac{n}{2}$$

erfüllt ist, besitzt einen Hamiltonkreis.

Beweis. Aufgrund der gegebenen Voraussetzungen erfüllt jedes Paar nicht-benachbarter Knoten die Ungleichung (1.1). Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Ore (Folgerung) 1.5.7). \square

1.6 Digraphen

Definition 1.6.1 Ein *Digraph* oder (*gerichteter Graph*) ist ein Quadrupel $\underline{D} = (V, E, \alpha, \omega)$, bestehend aus

- einer endlichen Menge V von Knoten,
- einer endlichen Menge E von (*gerichteten*) Kanten mit $E \cap V = \emptyset$,
- einer Abbildung $\alpha : E \rightarrow V$, für jede Kante e ist $\alpha(e)$ der *Anfangsknoten* von e ,
- einer Abbildung $\omega : E \rightarrow V$, für jede Kante e ist $\omega(e)$ der *Endknoten* von e .

Eine Kante e heißt *Schlinge*, wenn

$$\alpha(e) = \omega(e)$$

ist. Zwei Kanten e und \tilde{e} heißen *antiparallel*, wenn

$$\alpha(e) = \omega(\tilde{e}) \neq \alpha(\tilde{e}) = \omega(e)$$

ist.

Zwei Digraphen $\underline{D} = (V, E, \alpha, \omega)$ und $\tilde{\underline{D}} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{\alpha}, \tilde{\omega})$ heißen *isomorph*, wenn es bijektive Abbildungen $f : V \rightarrow \tilde{V}$, $g : E \rightarrow \tilde{E}$ mit $f \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ g$ und $f \circ \omega = \tilde{\omega} \circ g$ gibt; die Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Digraphen.

Jedem Digraphen lässt sich in kanonischer Weise ein Graph zuordnen, indem man die Richtung der Kanten „vergisst“.

Definition 1.6.2 Es sei $\underline{D} = (V, E, \alpha, \omega)$ ein Digraph. Der *unterliegende Graph* $|\underline{D}| = (V, E, \varphi_{\alpha\omega})$ ist gegeben durch:

$$\varphi_{\alpha\omega}(e) = \{\alpha(e), \omega(e)\}.$$

Den Begriff des Grades eines Knotens muss man für Digraphen etwas verfeinern.

Definition 1.6.3 Es seien $\underline{D} = (V, E, \alpha, \omega)$ ein Digraph und v ein Knoten von \underline{D} . Der α -Grad $\deg_{\alpha} v$ des Knotens v ist die Anzahl der Kanten, deren Anfangsknoten v ist, der ω -Grad $\deg_{\omega} v$ des Knotens v ist die Anzahl der Kanten, deren Endknoten v ist:

$$\begin{aligned} \deg_{\alpha} v &= \#\{e \in E \mid v = \alpha(e)\}, \\ \deg_{\omega} v &= \#\{e \in E \mid v = \omega(e)\} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt für alle Digraphen $\underline{D} = (V, E, \alpha, \omega)$:

$$\deg_{|\underline{D}|} = \deg_{\alpha} + \deg_{\omega}.$$

Die Eulerschen Sätze besitzen Variationen für Digraphen. Dazu benötigen wir die folgenden Begriffe, die sich zum Teil einfacher gestalten als im Fall von Graphen:

Definition 1.6.4 Es sei $\underline{D} = (V, E, \alpha, \omega)$ ein Digraph.

- Ein *gerichteter Kantenzug* (in \underline{D}) ist eine Folge von Kanten $(e_1 e_2, \dots, e_n)$ derart dass für alle $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ gilt:

$$\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$$

- Ein *gerichteter Kantenzug* ist ein gerichteter Kantenzug, in dem jede Kante höchstens einmal vorkommt, für den also mit den vorherigen Bezeichnungen gilt:

$$e_{i_1} \neq e_{i_2}$$

falls $i_1 \neq i_2$.

- Ein *gerichteter Eulerweg* ist ein gerichteter Kantenzug, der alle Kanten des Graphen \underline{G} enthält.
- Ein *gerichteter Kreis* ist ein gerichteter Kantenzug mit $\omega(e_n) = \alpha(e_1)$.
- Ein *gerichteter Eulerkreis* ist ein gerichteter Kreis, der alle Kanten enthält.

- Der Digraph \underline{D} ist *zusammenhängend*, wenn der unterliegende Graph $|\underline{D}|$ zusammenhängend ist.
- Der Digraph \underline{D} ist *pseudosymmetrisch*, wenn für alle Knoten v gilt:

$$\deg_{\alpha} v = \deg_{\omega} v.$$

Mit diesen Begriffen gilt:

Satz 1.6.5 *Ein Digraph besitzt genau dann einen gerichteten Eulerkreis, wenn er pseudosymmetrisch ist.*

Der *Beweis*, analog zum Beweis des Satzes 1.3.1, ist eine Übungsaufgabe, ebenso die Analogisierung des zweiten Eulerschen Satzes 1.3.2 (mit Beweis).

Beispiel 1.6.6 Es geht um die 1946 von dem holländischen Mathematiker Nicolaas Govert de Bruijn (* 9. 7. 1918) konstruierten Folgen. Gegeben sei eine s -elementige Menge, die wir als *Alphabet* betrachten. Ein *Wort* ist eine endliche Folge von Elementen des Alphabets, die Anzahl der Folgenglieder ist die Länge des Wortes. Zu einer festen natürlichen Zahl n sucht man ein Wort der Länge s^n , das – zyklisch gelesen – alle Wörter der Länge n als Teilfolge enthält. Ein solches Wort heißt *de-Bruijn-Folge*, es kann mit Hilfe eines Eulerkreises konstruiert werden.

Dazu betrachten wir den folgenden Digraphen $\underline{D} = (V, E, \alpha, \omega)$:

$$\begin{aligned} V &= \{\text{Wörter der Länge } n - 1\}, \\ E &= \{\text{Wörter der Länge } n\}, \\ \alpha(a_1 a_2 \dots a_n) &= a_1 a_2 \dots a_{n-1}, \\ \omega(a_1 a_2 \dots a_n) &= a_2 a_3 \dots a_n. \end{aligned}$$

mit Worten: Knoten sind die Wörter der Länge $n - 1$, Kanten die Wörter der Länge n , den Anfangsknoten einer Kante erhält man durch Weglassen des letzten, den Endknoten durch Weglassen des ersten Folgengliedes. Genau die Kanten, die als Folgen konstant sind, sind Schlingen; aus

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} = a_2 a_3 \dots a_n$$

folgt der Reihe nach:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = a_n.$$

Es gibt keine gleichgerichteten Mehrfachkanten: Haben die Kanten $a_1 a_2 \dots a_n$ und $b_1 b_2 \dots b_n$ den gleichen Anfangsknoten, so gilt $a_i = b_i$ für $i = 1, 2, n - 1$; haben sie den gleichen Endnoten, so gilt auch noch $a_n = b_n$.

Der Graph \underline{D} ist zusammenhängend: Es gibt sogar von jedem Knoten $a_1a_2 \dots a_{n-1}$ einen gerichteten Kantenzug zu jedem Knoten $b_1b_2 \dots b_{n-1}$, nämlich:

$$(a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1, a_2a_3 \dots a_{n-1}b_1b_2, \dots, a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-2}, b_1b_2 \dots b_{n-1}).$$

Nun bemerken wir, dass für alle Knoten v gilt:

$$\deg_\alpha v = s = \deg_\omega v;$$

also ist der Digraph \underline{D} auch pseudosymmetrisch und besitzt einen gerichteten Eulerkreis

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{s^n}, v_{s^n}).$$

Dabei ist

$$v_0 = v_{s^n}.$$

Im Folgenden werden die Indizes der Kanten als Elemente von $\mathbf{Z}_{s^n} = \mathbf{Z}/s^n\mathbf{Z}$ betrachtet, also

$$\begin{aligned} e_{s^n} &= e_0, \\ e_{s^n+1} &= e_1 \end{aligned}$$

und so weiter. Die Kanten e_j sind Wörter der Länge n :

$$e_j = e_{j_1}e_{j_2} \dots e_{j_n}.$$

Zwischen zwei aufeinander folgenden Kanten besteht eine enge Beziehung:

$$e_{j+1i} = e_{j_i+1} \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Wiederholte Anwendung ergibt

$$e_{ji} = e_{j-1i+1} = e_{j-2,i+2} = \dots = e_{j+i-nn},$$

also

$$e_j = e_{j+1-nn}e_{j+2-nn} \dots e_{jn}.$$

Damit haben wir die gesuchte de-Bruijn-Folge gefunden:

$$e_{1n}e_{2n} \dots e_{s^n n}.$$

Zur expliziten Berechnung kann man den angegebenen Hierholzer-Algorithmus passend abändern. Das Ergebnis könnte vielleicht folgendermaßen aussehen.

Ausgehend von einem Alphabet A muss zunächst die Knoten und Kanten herstellen. Dazu definiert man zunächst eine Prozedur **anhaengen**, die alle Wörter einer gegebenen List um jeweils ein Element verlängert, aber um jedes Element des Alphabets:


```

anhaengen:=proc(WW,AA)
  local n1, n2, nw, A1, W1;
  sw:=nops(WW); W1:=seq(a[j],j=1..nw)];
  for n1 to nw do A1:=AA;
    for n2 to nops(AA) do A1:=subsop(n2=cat(WW[n1],AA[n2]),A1) end do;
    W1[n1]:=A1
  end do;
  for n1 to nw-1 do
    W1:=subsop(1=NULL,2=[op(W1[1]),op(W1[2])],W1)
  end do;
  W1:=W1[1]
end proc:

```

Dann wird mit der Prozedur `nwoerter` die Liste aller Wörter der Länge n hergestellt.

```

nwoerter:=proc(AA,nn)
  local n1, W;
  W:=AA;
  for n1 to nn-1 do W:=anhaengen(W,A) end do;
end proc:

```

Jetzt kann man die Inzidenzlisten herstellen. Da man zu jeder Kante durch Weglassen des ersten Elements sofort den Endknoten erhält, genügt es, zu jedem Knoten die Liste der Kanten herzustellen, die an diesem Knoten beginnen. Das leistet die Prozedur `VAA`.

```

VAA:=proc(AA,nn)
  local k; global E, V, VVA;
  V:=nwoerter(AA,nn-1); E:=nwoerter(AA,nn);
  VVA:=seq(va[j],j=1..nops(V));
  for k to nops(V) do VVA[k]:=anhaengen([V[k]],AA) end do
end proc:

```

Wie im ungerichteten Fall benötigen wir eine Indexbestimmung, die die Prozedur `indces` leistet.

```

indces:=proc(vv,LL::list)
  local ni, nv;
  for ni to nops(LL) do if LL[ni]=vv then nv:=ni end if end do;
  nv
end proc:

```

Gerichtete Kreise werden mit der angepassten Prozedur `Kreis` erzeugt.

```

kreis:=proc(vv)
  local e, w, nn, nv, nw; global B, K, L, V, n;
  v:=vv; K:=[v];
  nv:=indces(v,V);
  while B[nv]<>[] do
    e:=VVA[nv][1]; B[nv]:=subsop(1=NULL,B[nv]);
    v:=substring(e,2..n); nv:=indces(v,V);
    if member(v,L)=false and B[nv]<>[] then L:=[op(L),v] end if;
    K:=[op(K),e,v]
  end do;
end proc:

```

Schließlich erfolgt die Herstellung eines Eulerkreis und die Reduktion auf die gesuchte „de Bruijn-Folge“ durch die Prozedur `deBruijn`.

```

deBruijn:=proc(AA,nn)
  local C, v, nk, nm; global E, B, K, L, V, VVA, n;
  VAA(AA,nn); B:=VVA; K:=[V[1]]; L:=[];
  kreis(V[1]);
  C:=K;
  while L<>[] do
    v:=L[nops(L)];
    L:=subsop(nops(L)=NULL,L);
    kreis(v);
    C:=subsop(indces(v,C)=op(K),C)
  end do;
  for nm to (nops(C)+1)/2 do C:=subsop(nm=NULL,C) end do;
  for nm to nops(C) do C:=subsop(nm=substring(C[nm],nn),C) end do;
  for nm to nops(C)-1 do C:=subsop(1=NULL,2=cat(C[1],C[2]),C) end do;
  op(C)
end proc:

```

Bei diesem Algorithmus gibt es allerdings eine durch Maple begründete Schwierigkeit: das System streikt, wenn s oder n größer als 4 gewählt werden. Dann treten zu lange Listen auf und man muss stattdessen mit *arrays* arbeiten.

1.7 Untergraphen, Zusammenhangskomponenten, Unterteilungen

Definition 1.7.1 • Ein Graph $\underline{\tilde{G}} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{\varphi})$ ist ein *Untergraph* des Graphen $\underline{G} = (V, E, \varphi)$, wenn gilt:

1. $\tilde{V} \subset V$;
2. $\tilde{E} \subset E$;
3. $\varphi(\tilde{e}) \subset \tilde{V}$ für alle $e \in \tilde{E}$;
4. $\tilde{\varphi}(\tilde{e}) = \varphi(\tilde{e})$ für alle $e \in \tilde{E}$.

Man sagt dann auch, dass \underline{G} eine Erweiterung von $\underline{\tilde{G}}$ ist.

- Der Untergraph $\underline{\tilde{G}}$ des Graphen \underline{G} heißt
 - *induziert*, wenn für alle $e \in E$ mit $\varphi(e) \subset \tilde{V}$ gilt: $e \in \tilde{E}$;
 - *erzeugend* oder *aufspannend*, wenn $\tilde{V} = V$ ist.
- Der Untergraph $\underline{\tilde{G}}$ ist eine *Zusammenhangskomponente* des Graphen \underline{G} , wenn gilt:
 1. $\underline{\tilde{G}}$ ist nicht leer.
 2. $\underline{\tilde{G}}$ ist zusammenhängend;
 3. $\underline{\tilde{G}}$ ist *maximal* bezüglich dieser Eigenschaft, das heißt, ist $\underline{\tilde{G}}$ Untergraph eines zusammenhängenden Graphen $\underline{\hat{G}}$, der selbst Untergraph von \underline{G} ist, so ist $\underline{\hat{G}} = \underline{\tilde{G}}$.

Bemerkung. Ein induzierter Untergraph ist durch seine Knotenmenge eindeutig bestimmt. Ist $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ ein Graph und \tilde{V} eine Teilmenge von V , so ist $\underline{\tilde{G}} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{\varphi})$ mit

$$\tilde{E} = \{e \in E \mid \varphi(e) \subset \tilde{V}\}$$

und

$$\tilde{\varphi}(e) = \varphi(e) \quad \text{für alle } e \in \tilde{E}$$

der eindeutig bestimmte induzierte Untergraph mit der Knotenmenge \tilde{V} . Ist $\tilde{V} = V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, so verwenden wir die folgende Bezeichnung:

$$\underline{\tilde{G}} = \underline{G} - v_1 - v_2 - \dots - v_k.$$

Beispiele 1.7.2

1. Ein Abschluss $[\underline{G}]$ eines Graphen \underline{G} ist eine Erweiterung von \underline{G} ; \underline{G} ist ein erzeugender Untergraph von $[\underline{G}]$.
2. Ist $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ ein Graph und v ein Knoten von \underline{G} , so bezeichnen wir

$$\underline{G} - v$$

den Untergraphen, der aus \underline{G} durch Wegnahme des Knotens v und aller mit ihm inzidenten Kanten entsteht.

Lemma 1.7.3 *Eine Zusammenhangskomponente eines Graphen ist ein induzierter Untergraph.*

Beweis. Es sei $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{\varphi})$ eine Zusammenhangskomponente des Graphen $\underline{G} = (V, E, \varphi)$. Gäbe es eine Kante $e \in E \setminus \tilde{E}$ mit $\varphi(e) \subset \tilde{V}$, so könnte man \tilde{G} um diese Kante erweitern, ohne den Zusammenhang zu stören. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von \tilde{G} . \square

Bemerkung. Jeder nicht leere Graph ist eine endliche *disjunkte Vereinigung* seiner Zusammenhangskomponenten.

Der Zusammenhangsbegriff wird noch in einer etwas verfeinerten Form benötigt.

Definition 1.7.4 1. Eine *trennende Knotenmenge* in einem zusammenhängenden schlichten Graphen (V, E, φ) ist eine Menge V von Knoten, derart dass der Untergraph $G - V$ nicht zusammenhängend ist.

2. Ein Graph ist *n-zusammenhängend*, wenn er schlicht sowie zusammenhängend ist und jede trennende Knotenmenge mindestens n Knoten enthält.

Es gilt dabei

Satz 1.7.5 (Menger 1927) *Ein zusammenhängender schlichter Graph ist genau dann 3-zusammenhängend, wenn je zwei verschiedene Knoten durch mindestens drei Kantewege verbunden werden können, die paarweise nur die Endknoten gemeinsam haben.*

Wir benötigen noch eine Operation, die man auf Graphen anwenden kann.

Definition 1.7.6 Ein Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{\varphi})$ ist

- eine *einfache Unterteilung* des Graphen $\underline{G} = (V, E, \varphi)$, wenn gilt:

1. $\tilde{V} = V \cup \{\tilde{v}\}$ mit $\tilde{v} \in \tilde{V} \setminus V$;
2. $E \cup \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\} = \tilde{E} \cup \{e\}$ mit $e \in E \setminus \tilde{E}$, $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in \tilde{E} \setminus E$;
3. $\tilde{\varphi}(\tilde{e}_1) \cup \tilde{\varphi}(\tilde{e}_2) = \varphi(e) \cup \{\tilde{v}\}$, $\tilde{\varphi}(\tilde{e}_1) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{e}_2) = \{\tilde{v}\}$,
4. $\tilde{\varphi}(e) = \varphi(e)$ für alle $e \in E \cap \tilde{E}$.

- eine *Unterteilung* des Graphen \underline{G} , wenn es eine endliche Folge von Graphen $\underline{G}_0, \underline{G}_1, \dots, \underline{G}_n$ mit $\underline{G}_0 = \underline{G}$ und $\underline{G}_n = \tilde{\underline{G}}$ gibt, derart dass für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ der Graph \underline{G}_i eine einfache Unterteilung des Graphen \underline{G}_{i-1} ist.
- Zwei Graphen heißen *homöomorph*, wenn sie isomorphe Unterteilungen besitzen.

Satz 1.7.7 *Jeder Graph ist homöomorph zu einem schlichten Graphen, genauer: Jeder Graph besitzt eine Unterteilung, die ein schlichter Graph ist.*

Beweis. Die Punkte und Strecken, die wir zur Herstellung der geometrischen Realisierung verwendet haben, bilden einen schlichten Graphen, der eine Unterteilung des ursprünglichen Graphen ist. \square

Achtung. Führt man in dem angegebenen Bild des vollständigen Graphen \underline{K}_5 die Kreuzungspunkte der Diagonalen als neuen Knoten ein und ersetzt man jede Diagonale durch die drei Strecken, in die sie zerlegt wird, so erhält man keine Unterteilung der \underline{K}_5 in der hier definierten Weise.

Kapitel 2

Planare Graphen

2.1 Ebene Graphen

Definition 2.1.1

1. Eine Teilmenge C von \mathbb{R}^2 ist
 - ein *Jordanbogen*, wenn es eine injektive stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{Bild}c = C$ gibt;
 - eine *geschlossene Jordankurve*, wenn es eine injektive stetige Abbildung $c : S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{Bild}c = C$ gibt;
 - eine *Jordankurve*, wenn sie entweder ein Jordanbogen oder eine geschlossene Jordankurve ist.
2. Eine Teilmenge G von \mathbb{R}^2 ist
 - *bogenzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte von G durch einen ganz in G verlaufenden Jordanbogen verbunden werden können,
 - ein *Gebiet*, wenn sie offen und bogenzusammenhängend ist.

Die in dieser Definition auftretenden Abbildungen c – es handelt sich um *Parameterdarstellungen* der Punktmenge C – sind durch C nicht eindeutig bestimmt. Wohl aber ist im Fall des Jordanbogens die Menge

$$\dot{C} = \{c(0), c(1)\}$$

der Randpunkte allein durch die Punktmenge C , unabhängig von einer speziellen Wahl der Abbildung c bestimmt. Die Punkte in $C \setminus \dot{C}$ heißen *innere Punkte* des Jordanbogens.

Mit diesen Begriffen kann man die intuitive Vorstellung eines ebenen Graphen präzisieren.

Definition 2.1.2

- Ein *ebener Graph* ist ein Graph $\underline{G} = (V, E, \varphi)$ mit folgenden Eigenschaften:
 1. die Knoten sind Punkte der Ebene \mathbb{R}^2 : $V \subset \mathbb{R}^2$;
 2. die Kanten sind Jordankurven;
 3. für alle Jordanbögen $C \in E$ gilt: $\dot{C} \subset V$, $\varphi(C) = \dot{C}$;
 4. für alle geschlossenen Jordankurven $C \in E$ gilt: $\#(C \cap V) = 1$, $\varphi(C) = C \cap V$;
 5. zwei verschiedene Kanten haben nur Randpunkte gemeinsam:

$$C_1, C_2 \in E, C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \varphi(C_1) \cap \varphi(C_2).$$

- Ein Graph heißt *planar*, wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.

Aus der Definition ergibt sich, dass bei ebenen Graphen die Abbildung φ durch die Mengen V und E bestimmt ist. Damit können wir auf die explizite Angabe verzichten und notieren ebene Graphen nur in der Form $\underline{G} = (V, E)$.

Bei ebenen Graphen sind außer den Knoten und Kanten auch noch andere Punktmenge interessant. Sie ergeben sich aus dem folgenden Satz, der hier nicht bewiesen werden soll.

Satz 2.1.3 *Es sei $\underline{G} = (V, E)$ ein ebener Graph.*

1. Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus (V \cup \bigcup_{C \in E} C)$ ist eine endliche Vereinigung von disjunkten Gebieten.
2. Der Rand eines solchen Gebietes ist eine Vereinigung von Kanten und isolierten Knoten; er lässt sich deshalb als Untergraph von \underline{G} auffassen.
3. Je zwei Punkte im Rand eines solchen Gebietes können durch einen Jordanbogen verbunden werden, dessen innere Punkte sämtlich in dem Gebiet liegen.

Diese Gebiete heißen *Seiten* des Graphen. Genau eine Seite ist unbeschränkt, die anderen sind beschränkt. Die Begriffsbildung erklärt sich aus den Gerüstgraphen der regulären Polyeder. Wenn man diese – wie im 1. Kapitel beschrieben – in die Ebene projiziert, so gehen die Seiten des Polyeders in die Seiten des ebenen Graphen über.

Beispiel 2.1.4 *Die Ecken und Seiten eines krummlinigen Dreiecks bilden einen ebenen Graphen mit drei Knoten und drei Kanten, einer beschränkten einer unbeschränkten Seite.*

Im Folgenden werden wir jedoch ebene Graphen nicht in voller Allgemeinheit betrachten. Die wesentliche Theorie lässt sich schon mit spezielleren Objekten darstellen. Dass dies möglich ist, liegt von zwei tief liegenden Sätzen der Topologie der Ebene, die im folgenden mehrfach benötigt werden, aber hier nur zitiert werden sollen. Sie wurden von dem Franzosen Camille Jordan (1838-1922) und dem Deutschen Arthur Schoenflies (1853–1928) gefunden. Letzterer war von 1899 bis 1911 der erste Inhaber eines Lehrstuhls für Angewandte Mathematik an der Albertina in Königsberg.

Satz 2.1.5 (Jordanscher Kurvensatz) *Eine geschlossene Jordankurve C zerlegt die Ebene in genau zwei Gebiete, das heißt, die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus C$ besteht aus genau zwei offenen, bogenzusammenhängenden Teilmengen. Dabei ist ein Gebiet beschränkt, das Innere von C , und das andere unbeschränkt, das Äußere von C .*

Satz 2.1.6 (Satz von Schoenflies) *Jede injektive stetige Abbildung $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich zu einem Homöomorphismus $\hat{c} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fortsetzen, der die offene Einheitskreisscheibe auf das Innere der geschlossenen Jordankurve $\text{Bild } c$ abbildet.*

Dabei ist ein *Homöomorphismus* eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. In den Anwendungen braucht man die offensichtliche Folgerung aus diesem Satz.

Folgerung 2.1.7 *Es seien C und C' geschlossene Jordankurven. Dann lässt sich jeder Homöomorphismus $c : C \rightarrow C'$ zu einem Homöomorphismus $\hat{c} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fortsetzen, der das Innere von C homöomorph auf das Innere von C' abbildet.*

Diese Folgerung wird häufig zu folgendem Zweck benutzt: Gegeben sei ein ebener Graph \underline{G} , derart dass die unbeschränkte Seite von einem einfachen Kreis \underline{K} , also einer geschlossenen Jordankurve berandet wird. Ferner sei ein ebener, zu \underline{K} isomorpher Kreis \underline{K}' gegeben. Wir wählen für jede Kante von \underline{K} einen Homöomorphismus, der sie auf die entsprechende Kante von \underline{K}' abbildet. Diese Homöomorphismen lassen sich zu einem Homöomorphismus der geschlossenen Jordankurve \underline{K} auf die geschlossene Jordankurve \underline{K}' zusammensetzen. Der Satz von Schoenflies liefert eine Fortsetzung dieses Homöomorphismus auf die ganze Ebene \mathbb{R}^2 , der den Graphen \underline{G} auf einen isomorphen Graphen \underline{G}' abbildet, dessen unbeschränkte Seite von dem Kreis \underline{K}' berandet wird.

Für schlichte ebene Graphen gibt es sehr einfache Realisierungen in der Ebene. Das ist der Inhalt eines berühmten Satzes des deutschen Graphentheoretikers Klaus Wagner (1910-2000) und des aus Ungarn stammenden, von 1962 an in Berkeley (Kalifornien) wirkenden István Fáry (1922-1984). Der Satz benötigt einige Vorbereitungen, die wir seiner Formulierung und dem Beweis voranschicken.

2.2 Sternförmige Polygone

Wir erinnern an folgende einfache Tatsachen: Zwei verschiedene Punkte a und b bestimmen genau eine Gerade, die *Verbindungsgerade* ab ; die beiden Punkte zusammen mit den auf dieser Geraden zwischen ihnen liegenden Punkten bilden die *Strecke* $[a, b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0, 1]\}$. Dabei sind die folgenden Schreibweisen üblich:

$$[a, b[= [a, b] \setminus \{b\}, \quad]a, b] = [a, b] \setminus \{a\}, \quad]a, b[= [a, b] \setminus \{a, b\}.$$

Definition 2.2.1

- Ein *Streckenzug* ist ein Jordanbogen C , der sich in Strecken zerlegen lässt, das heißt, in dem es endlich viele, aufeinander folgende Punkte c_0, c_1, \dots, c_k mit $\dot{C} = \{c_0, c_k\}$ gibt, derart dass gilt:

$$C = [c_0, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \dots \cup [c_{k-1}, c_k].$$

- Ein *Polygon* ist eine geschlossene Jordankurve C , die sich in Strecken zerlegen lässt, das heißt, in der es endlich viele, (zyklisch) aufeinander folgende Punkte c_0, c_1, \dots, c_k gibt, derart dass gilt:

$$C = [c_0, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \dots \cup [c_{k-1}, c_k] \cup [c_k, c_0].$$

Es handelt sich um ein (*nicht überschlagenes*) m -Eck, wenn mindestens m Zerlegungspunkte benötigt werden ($3 \leq m \in \mathbb{N}$). Diese Zerlegungspunkte heißen auch *Ecken* des Polygons.

- Ein Punkt z ist ein *Zentrum* des Polygons C , wenn z zum Inneren von C gehört und für jeden Punkt $a \in C$ die halboffene Strecke $[z, a[$ ganz im Inneren von C liegt.
- Ein Polygon heißt *sternförmig*, wenn es ein Zentrum besitzt.

Aufgabe. Zeigen Sie, dass alle Drei-, Vier- und Fünfecke sternförmig sind. Geben Sie ein Beispiel für ein nicht sternförmiges Sechseck.

Lemma 2.2.2 *Die Menge der Zentren eines Polygons ist offen.*

Da die leere Menge offen ist, gilt dies auch für nicht sternförmige Polygone.

Beweis. Es seien c_1, c_2, \dots, c_m die Ecken eines Polygons C . Es ist also aus den Strecken

$$C_i = [c_i, c_{i+1}], \quad i \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \quad \text{und } C_m = [c_m, c_1]$$

zusammengesetzt. Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ wählen wir einen Punkt d_i im Inneren der geschlossenen Jordankurve C , derart dass das Innere des von der Strecke C_i und dem Punkt d_i aufgespannten Dreieckes Δ_i ganz im Inneren der geschlossenen Jordankurve liegt, und wir bezeichnen mit H_i die offene Halbebene, die von der Trägergeraden der Strecke C_i begrenzt wird und den Punkt d_i enthält.

Die Menge

$$\bigcap_{i=1}^m H_i$$

ist als Durchschnitt von offen Mengen offen. Wir zeigen, dass es sich um die Menge der Zentren des Polygons C handelt. Ist z ein Zentrum, so ist zu zeigen, dass z in jeder Halbebene H_i liegt. Wir betrachten ein festes i und wählen einen inneren Punkt b_i der Strecke C_i . Die Strecke $[z, b_i]$ hat mit dem Dreieck Δ_i innere Punkte gemeinsam und liegt damit ganz in der Halbebene H_i .

Nun ist noch umgekehrt zu zeigen, dass ein Punkt im Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^m H_i$ ein Zentrum ist. Dazu sei c ein Punkt des Polygons C . Wir finden einen Index $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $c \in C_i$. Wir führen nun einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen, die halboffene Strecke $[z, c[$ liegt nicht ganz im Inneren des Polygons C . Zumindest eine an den Punkt c anstoßende Teilstrecke der Strecke $[z, c]$ liegt jedoch in H_i und damit im Inneren des Polygons C . Die Strecke $[c, z]$ verlässt das Innere des Polygons an einem Punkt $\tilde{c} \in C_j$, $j \neq i$. Dann liegen aber die Punkte d_j und z auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden der Strecke C_j im Widerspruch zu $z \in H_j$. \square

Im Zusammenhang mit unserem Ziel ist der folgende Satz wichtig. Dazu stellen wir zunächst fest, dass ein Polygon durch zwei beliebig auf ihm liegende Punkte in zwei Streckenzüge zerlegt wird.

Satz 2.2.3 *Es seien C ein sternförmiges Polygon, z ein Zentrum von C , x und y zwei verschiedene Punkte von C und S einer der Streckenzüge, in die C durch die Punkte x und y zerlegt wird. Dann ist $C' = S \cup [x, z] \cup [y, z]$ wieder ein sternförmiges Polygon.*

Beweis. C' ist eine geschlossene Jordankurve mit z als Randpunkt. Wir betrachten die Halbebenen, wie sie im vorigen Beweise definiert wurden. Da das Polygon C sternförmig, liegt der Punkt z im Durchschnitt der Halbebenen zum Polygon C' , die durch die dem Streckenzug S angehörenden Strecken definiert sind. Also gibt eine Kreisscheibe um den Punkt z , die ganz in diesem Durchschnitt liegt. Der Punkt z ist aber auch gemeinsamer Randpunkt der zu den Geraden xz und yz gehörenden Halbebenen, die damit einen nicht leeren Durchschnitt haben, der auch die genannte Kreisfläche trifft. Folglich haben alle diese Halbebenen einen nichtleeren Durchschnitt, das Polygon C' ist sternförmig. \square

2.3 Maximal ebene Graphen

Definition 2.3.1 Ein *maximal ebener Graph* ist ein schlichter ebener Graph, der nicht unter Hinzunahme von Kanten ohne Veränderung der Knotenmenge zu einem schlichten ebenen Graphen erweitert werden kann.

Ein kantenloser ebener Graph ist genau dann maximal eben, wenn die Knotenmenge höchstens ein Element enthält. Die maximal ebenen Graphen mit zwei Knoten haben die Form $(\dot{C}, \{C\})$, wobei C einen beliebigen Jordanbogen bezeichnet. Interessantere Aussagen ergeben sich, wenn mehr als zwei Knoten vorhanden sind.

- Satz 2.3.2**
1. Bei einem maximal ebenen Graphen sind zwei Knoten, die zum Rand einer Seite gehören, durch eine Kante verbunden.
 2. Ein maximal ebener Graph ist zusammenhängend.
 3. Ein Graph ist genau dann maximal eben, wenn der Rand jeder Seite ein (krummliniges) Dreieck ist.

Klar ist

Satz 2.3.3 Jeder schlichte ebene Graph ist Untergraph eines maximal ebenen Graphen.

2.4 Der Satz von Wagner und Fáry

Definition 2.4.1 Ein *Streckengraph* ist ein ebener Graph, dessen Kanten Strecken sind.

Da zwei Punkte nur durch eine Strecke verbunden werden können und andererseits eine Strecke immer ein Jordanbogen, aber keine geschlossene Jordankurve ist, ist ein Streckengraph immer schlicht.

Satz 2.4.2 (Satz von Wagner 1936 und Fáry 1947) Jede schlichte ebene Graph ist isomorph zu einem Streckengraphen.

Beweisskizze. Es sei $\underline{G} = (V, E)$ ein schlichter ebener Graph. Wir haben einen isomorphen Streckengraphen zu konstruieren. Da jeder schlichte ebene Graph Untergraph eines maximal ebenen Graphen und jeder Untergraph eines Streckengraphen selbst wieder ein Streckengraph ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass \underline{G} maximal eben ist.

Hat \underline{G} höchstens drei Knoten, so ist die Behauptung trivial. Wir können also $\#V = n > 3$ annehmen.

Der Rand der unbeschränkten Seite ist dann ein krummliniges Dreieck mit Knoten v_1, v_2, v_3 . Aufgrund der Maximalität können wir die übrigen Knoten v_4, \dots, v_n so nummerieren, dass jeder Knoten v_j zu mindestens zwei Knoten v_i mit $i < j$ benachbart ist. Mit \underline{G}_j bezeichnen wir den von v_1, v_2, \dots, v_j aufgespannten Untergraphen von \underline{G} . Dabei gehen wir induktiv vor: Angenommen wir haben die Knoten bis j nummeriert. Wir nehmen eine Seite L des Graphen \underline{G}_j , in der mindestens ein weitere Knoten liegt, und eine Kante im Rand dieser Seite. In \underline{G} ist diese Kante im Rand eines krummlinigen Dreiecks, das ganz in L . Die dritte Ecke dieses Dreiecks nehmen wir als v_{j+1} .

Wir konstruieren nun der Reihe nach zu \underline{G} isomorphe schlichte ebenen Graphen \underline{G}'_j , $j \in \{3, 4, \dots, n\}$, derart dass der dem Untergraphen \underline{G}_j entsprechende Untergraph $\hat{\underline{G}}_j$ von \underline{G}'_j ein Streckengraph ist, dessen beschränkte Seiten alle von sternförmigen Polygonen berandet werden. Der Graph \underline{G}'_n ist dann der gesuchte zu \underline{G} isomorphe Streckengraph.

Zur Durchführung dieser Idee wählen wir drei beliebige, nicht kollineare Punkte v'_1, v'_2, v'_3 . Zusammen mit den sie verbindenden Strecken bilden sie den Graphen $\hat{\underline{G}}_3$. Wie im Anschluss an die Folgerung aus dem Satz von Schoenflies geschildert finden wir dann den zu \underline{G} isomorphen Graphen \underline{G}'_3 .

Nun sei \hat{v}_4 der v_4 entsprechende Knoten in \underline{G}'_3 ; es handelt um einen inneren Punkt des Dreiecks $\hat{\underline{G}}_3$. Wir betrachten den von v'_1, v'_2, v'_3 und \hat{v}_4 aufgespannten Untergraphen $\tilde{\underline{G}}_4$ von \underline{G}'_3 . Er hat zwei oder drei beschränkte Seiten, die von einem krummlinigen Dreieck oder einem krummlinigen Viereck berandet werden. Wir bilden nun den Streckengraphen $\hat{\underline{G}}_4$, in dem wir zu dem Dreieck $\hat{\underline{G}}_3$ den Knoten $v'_4 = \hat{v}_4$ und die Kanten (=Strecken) $[v'_i, v'_4]$ für die i hinzunehmen, für eine v_i und \hat{v}_4 verbindende Kante C_i in \underline{G}_3 existiert. Für dieselben Indizes i wählen wir nun einen Homöomorphismus $g_i : C_i \rightarrow [v'_i, v'_4]$ und setzen diese zu Homöomorphismen der Ränder der beschränkten Seiten von $\tilde{\underline{G}}_4$ auf die Ränder der beschränkten Seiten von $\hat{\underline{G}}_4$ zusammen. Nach der Folgerung aus dem Satz von Schoenflies können wir diese Homöomorphismen zu Homöomorphismen entsprechender Seiten fortsetzen und erhalten so den Graphen \underline{G}'_4 . Die beschränkten Seiten von $\hat{\underline{G}}_4$ werden offensichtlich von sternförmigen Polygonen berandet, allerdings ist im Falle eines Vierecks nicht jeder Punkt Zentrum.

Nun sei \hat{v}_5 der v_5 entsprechende Knoten in \underline{G}'_4 ; der Punkt liegt in einer Seite des Graphen $\hat{\underline{G}}_4$, ist aber nicht notwendig ein Zentrum des berandenden Polygons. Wir wählen in dieser Seite ein Zentrum und definierten dieses als v'_5 . Dann bilden wir – analog zum vorigen Schritt – den Streckengraphen $\hat{\underline{G}}_5$ mit den Knoten v'_1, \dots, v'_5 und erweitern mit Hilfe der Folgerung aus dem Satz von Schoenflies zu dem Graphen \underline{G}'_5 . Nach Satz 2.2.3 ist jede Seite

von \hat{G}_5 von einem sternförmigen Polygon berandet. Damit kann das Verfahren fortgesetzt werden, bis der gewünschte Streckengraph \underline{G}' gefunden ist. \square

Wenn wir auf die Schlichtheit verzichten, haben wir noch den folgenden Sachverhalt.

Satz 2.4.3 *Jeder ebene Graph ist isomorph zu einem ebenen Graphen, dessen Kanten Streckenzüge und Polygone sind.*

Beweis. Ist ein ebener Graph gegeben, so ist jede Unterteilung ein planarer Graph und isomorph zu einem ebenen Graphen. Wir wählen mit Satz 1.7.7 eine Unterteilung, die ein schlichter Graph ist, und finden mit Hilfe des Satzes von Wagner und Fáry einen dazu isomorphen Streckengraphen. Die Kanten des ursprünglichen Graphen entsprechen dann Streckenzüge aus Kanten dieses Streckengraphen. \square

2.5 Der Eulersche Polyedersatz und nicht planare Graphen

Der berühmte Eulersche Polyedersatz besagt, dass für die Anzahlen der $\#V$ der Ecken, $\#E$ der Kanten und $\#F$ der Seiten eines konvexen Polyeders gilt:

$$\#V - \#E + \#F = 2.$$

Daraus folgt dieselbe Formel für die entsprechenden Anzahlen ebener Graphen, die isomorph zu Gerüstgraphen konvexer Polyeder sind. Wir beweisen nun eine etwas allgemeinere Aussage, die auf den Franzosen Augustin Louis Cauchy (1789-1857) zurückgeht.

Satz 2.5.1 *Es sei $\underline{G} = (V, E)$ ein ebener Graph mit n Knoten, m Kanten, f Seiten und z Zusammenhangskomponenten. Dann gilt*

$$n - m + f = 1 + z.$$

Beweis durch Induktion nach m , der Anzahl der Kanten. Ist $m = 0$, so haben wir einen kantenlosen Graphen mit einer einzigen Seite, also $f = 1$. Jeder Knoten ist eine Zusammenhangskomponente, also gilt auch $n = z$ und die Formel ist richtig.

Nun sei ein ebener Graph mit $m + 1$ Kanten vorgelegt. Wir wählen eine beliebige Kante C in \underline{G} und bilden den Untergraphen \underline{G}' durch Weglassen dieser Kante. Nach Induktionsvoraussetzung gilt mit den entsprechend gewählten Bezeichnungen:

$$n' - m' + f' = 1 + z'.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. C ist eine *Kreiskante*, das heißt, C gehört zu einem Untergraphen von \underline{G} , der ein Kreis ist, oder eine Schlinge. In diesem Fall gehört C nach dem Jordanschen Kurvensatz zum Rand von zwei verschiedenen Seiten von \underline{G} , die durch das Weglassen der Kante C zu einer Seite von \underline{G}' vereinigt werden. Die Zahl der Zusammenhangskomponenten von \underline{G} ändert sich dabei nicht, ebenso bleibt die Zahl der Knoten unverändert. Damit haben wir

$$n = n', \quad m = m' + 1, \quad f = f' + 1, \quad z = z',$$

also

$$n - m + f = n' - (m' + 1) + (f' + 1) = n' - m' + f' = 1 + z' = 1 + z,$$

wie gewünscht.

2. Im anderen Fall heißt C *Brücke*. Wir betrachten die Zusammenhangskomponente \tilde{G} von \underline{G} , die C enthält. Es seien u und w die Endknoten von C :

$$\dot{C} = \{u, w\}.$$

Kein Knoten in \tilde{G} kann in \underline{G}' sowohl mit u als auch mit w verbunden sein; denn sonst ließen sich die zugehörigen Wege in \underline{G} mit C zu einem Kreis zusammensetzen, und C wäre eine Kreiskante. Damit zerfällt \tilde{G} in \underline{G}' in zwei Zusammenhangskomponenten. Mit etwas Mühe zeigt man nun noch unter Benutzung von Sätzen der Topologie der Ebene, dass sich beim Übergang von \underline{G} zu \underline{G}' die Zahl der Seiten nicht ändert, das heißt, dass eine Brücke nur im Rand einer Seite liegt. Damit können wir zusammenfassen:

$$n = n', \quad m = m' + 1, \quad f = f', \quad z = z' - 1,$$

also

$$n - m + f = n' - (m' + 1) + f' = n' - m' + f' - 1 = z' = 1 + z,$$

ebenfalls wie gewünscht. □

Folgerung 2.5.2 (Eulersche Polyederformel) *Es sei $\underline{G} = (V, E)$ ein zusammenhängender ebener Graph mit n Knoten, m Kanten und f Seiten. Dann gilt*

$$n - m + f = 2.$$

□

Bemerkung. Da in diesen Überlegungen immer die Gerüstgraphen der platonischen Körper eine Rolle spielen, wollen wir an dieser Stelle kurz zeigen, wie sich mit Hilfe

der Eulerschen Polyederformel ergibt, dass nur die fünf bekannten platonischen Körper existieren. Ein platonischer Körper ist nach Definition ein konvexer Körper, der von zueinander kongruenten regulären Polygonen begrenzt ist, derart dass an jeder Ecke gleich viele zusammenstoßen. Handelt es sich um p -Ecke und stoßen an jeder Ecke genau q zusammen, wobei offensichtlich $p, q \geq 3$ sein muss, so gilt, da jede Kante zu genau zwei p -Ecken gehört:

$$f \cdot p = 2 \cdot m.$$

Da jede Kante mit genau zwei Ecken inzidiert, gilt weiter:

$$n \cdot q = 2 \cdot m.$$

Diese Gleichungen werden nach f und n aufgelöst und die Ergebnisse in die Eulersche Formel eingesetzt:

$$\frac{2m}{q} - m + \frac{2m}{p} = 2.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{2}{m}.$$

Damit kommen wir zu der Ungleichung

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2},$$

aus der sich alles Gewünschte ergibt. Schreiben wir diese Ungleichung zunächst in der Form

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{q},$$

so finden wir mit $q \geq 3$ sofort

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

also $p < 6$ und analog $q < 6$. Es kommen also nur die neun Paare $(p, q) \in \{3, 4, 5\}^2$ in Frage. Von diesen erfüllen aber die Paare ohne eine Komponente 3 die Ungleichung nicht. Es bleiben also Paare:

- (3,3) Tetraeder
- (3,4) Oktaeder
- (4,3) Würfel
- (3,5) Ikosaeder
- (5,3) Dodekaeder

In unserem Zusammenhang benötigen wir die Eulersche Polyederformel um zu beweisen, dass zwei interessante Graphen nicht planar sind.

Satz 2.5.3 *Der vollständige Graph \underline{K}_5 und der vollständig bipartite Graph $\underline{K}_{3,3}$ sind nicht planar.*

Beweis durch Widerspruch.

Angenommen, wir haben einen zu \underline{K}_5 isomorphen ebenen Graphen, der wie \underline{K}_5 zusammenhängend ist, mit $n = 5$ Knoten, $m = 10$ Kanten und f Seiten. Aus der Eulerschen Polyederformel folgt

$$f = 7$$

Da \underline{K}_5 ein schlichter Graph ist, enthält der Rand jeder Seite mindestens drei Kanten, also über alle Seiten summiert erhalten wir mindestens 21 Kanten. Jede Kante gehört zum Rand von höchstens zwei Seiten, also brauchen wir mindestens $21/2$, also mindestens 11 Kanten. Wir haben aber nur 10!

Angenommen, wir haben einen zu $\underline{K}_{3,3}$ isomorphen ebenen Graphen, der wie $\underline{K}_{3,3}$ zusammenhängend ist, mit $n = 6$ Knoten, $m = 9$ Kanten und f Seiten. Aus der Eulerschen Polyederformel folgt

$$f = 5.$$

Da $\underline{K}_{3,3}$ ein vollständig bipartit ist, enthält er keine Dreiecke, keine Kreise aus drei Kanten. Damit besteht der Rand jeder Seite aus mindestens vier Kanten, die Summation über alle Seiten ergibt einen Mindestbedarf von 20 Kanten. Jede Kante gehört zum Rand von höchstens zwei Seiten, also brauchen wir mindestens 10 Kanten. Wir haben aber nur 9! \square

Bei den nicht-planaren Graphen dieses Satzes handelt es sich nicht um zufällige Beispiele, sondern sie haben in Bezug auf die allgemeine Frage nach der Planarität von Graphen eine grundlegende Bedeutung, die der polnische Mathematiker Kasimierz Kuratowski (1896-1980) herausgefunden hat und im nächsten Abschnitt dargestellt wird.

2.6 Der Satz von Kuratowski

Dieser Abschnitt ist dem nachfolgenden berühmten Satz gewidmet. Es gibt in der mathematischen Literatur viele Beweise, im allgemeinen einfach, aber langwierig. Einen relativ kurzen, aber nicht ganz trivialen Beweis hat 1997 Yury Makarychev aus Moskau, zur Zeit für Microsoft Research in Cambridge, Massachusetts, tätig, gegeben, den wir hier skizzieren. Ein russische Fassung dieses Beweises erschien in: *Matematicheskoe Prosveschtschenie*, Serie 3, byp. 9 (2005), 116-128.

Satz 2.6.1 (Satz von Kuratowski 1930) *Ein Graph ist genau dann planar, wenn kein Untergraph zu einer Unterteilung von \underline{K}_5 oder $\underline{K}_{3,3}$ isomorph ist.*

Man kann die Bedingung auch so formulieren: *wenn kein Untergraph zu \underline{K}_5 oder $\underline{K}_{3,3}$ homöomorph ist.*

Vorbemerkungen. Da eine Unterteilung eines Graphen genau dann planar ist, wenn der Graph selber planar ist, betrachten wir in diesem Abschnitt ausschließlich schlichte Graphen $\underline{G} = (V, E)$, bestehend aus einer endlichen Menge V und einer Menge E von 2-elementigen Teilmengen von V , also Untergraphen des vollständigen Graphen mit der Knotenmenge V .

Da schlichte Graphen Untergraphen von vollständigen Graphen und Untergraphen von planaren Graphen selbst wieder planar sind, ist jeder Graph mit höchstens vier Knoten als Untergraph des vollständigen Graphen \underline{K}_4 planar. Nicht-planare Graphen besitzen also mindestens fünf Knoten. Ein Graph mit fünf Knoten ist planar, wenn es wenigstens ein Paar von nicht benachbarten Knoten gibt.

Zunächst benötigen wir einige Begriffe.

Definition 2.6.2

- Der Graph $\underline{G}' = (V', E')$ entsteht aus dem Graphen $\underline{G} = (V, E)$ durch *elementare Kontraktion*, wenn zwei benachbarte Knoten miteinander identifiziert werden. Das bedeutet in Mengenschreibweise: Es gibt $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$ und $\{v_1, v_2\} \in E$ und $v' \in V' \setminus V$, derart dass gilt:

$$\begin{aligned} V' &= (V \setminus \{v_1, v_2\}) \cup \{v'\}, \\ E' &= (E \setminus (\{\{v_1, v\} \mid \{v_1, v\} \in E\} \cup \{\{v_2, v\} \mid \{v_2, v\} \in E\})) \cup \\ &\quad \cup \{\{v, v'\} \mid \{v_1, v\} \in E \vee \{v_2, v\} \in E\}. \end{aligned}$$

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} \underline{G}' &= \underline{G}/v_1v_2, \\ v' &= v_1v_2. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\underline{G}' - v_1v_2 = \underline{G} - v_1 - v_2 \quad (2.1)$$

- Der Graph \underline{G}' ist ein *Minor* des Graphen \underline{G} , wenn er ein Untergraph eines durch eine Folge von elementaren Kontraktionen aus \underline{G} entstandenen Graphen ist. Ein *echter Minor* ist ein von \underline{G} verschiedener Minor.
- Ein Graph \underline{G} ist ein *minorer minimaler nicht-planarer Graph*, wenn gilt:

1. \underline{G} ist zusammenhängend;
 2. \underline{G} ist nicht-planar;
 3. jeder echte Minor von \underline{G} ist planar.
- (Makarychev) Ein θ -Untergraph eines Graphen ist ein zu $\underline{K}_{2,3}$ homöomorpher Untergraph.¹

Wir bemerken zunächst

Satz 2.6.3 1. Jeder Minor eines planaren Graphen ist selbst planar.

2. Enthält ein Minor eines Graphen einen zu \underline{K}_5 oder $\underline{K}_{3,3}$ homöomorphen Untergraphen, so enthält der Graph selbst einen solchen Untergraphen (nicht notwendig denselben Typ).

Beweis. In jedem Fall genügt es, einfache Kontraktionen zu betrachten.

1. Es sei \underline{G} ein Streckengraph. Aus der Topologie der Ebene ist die Existenz einer surjektiven stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bekannt, die die Strecke $[v_1, v_2]$ auf einen Punkt v' und $\mathbb{R}^2 \setminus [v_1, v_2]$ homöomorph auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{v'\}$ abbildet. Dabei wird der Graph \underline{G} auf einen Graphen $\tilde{\underline{G}}$ abgebildet, der möglicherweise nicht schlicht ist. Durch Weglassen auftretender Mehrfachkanten erhält man dann einen zu \underline{G}' isomorphen ebenen Graphen.

2. Es sind verschiedene Fälle zu diskutieren, wir betrachten nur die interessantesten. Es seien u und w Knoten des Graphen \underline{G} , derart dass ein Untergraph von \underline{G}/uw isomorph zu \underline{K}_5 ist. Sind dessen Knoten alle von uw verschieden, so liegt der auch in \underline{G} und es ist nichts weiter zu zeigen. Also können wir annehmen, dass uw ein Knoten dieses Untergraphen ist; die übrigen seien mit v_1, v_2, v_3, v_4 bezeichnet. In \underline{G} ist jeder der vier Knoten v_i entweder zu u oder zu w benachbart.

1. Sind alle Knoten v_i zu u (oder alle zu w) benachbart, so erzeugen sie in \underline{G} einen \underline{K}_5 .
2. Sind etwa drei Knoten v_1, v_2, v_3 zu u benachbart, aber v_4 zu w , so erzeugen sie eine einfache Unterteilung von \underline{K}_5 .
3. Es sei nun angenommen, dass v_1 und v_2 zu u , sowie v_3 und v_4 zu w benachbart sind. Dann enthält der Graph \underline{G} nicht notwendig einen zu \underline{K}_5 homöomorphen Untergraphen, aber der von diesen sechs Knoten aufgespannte Untergraph enthält auf jeden Fall einen zu $\underline{K}_{3,3}$ isomorphen Untergraphen, beschrieben durch die Partition der Knotenmenge in $\{v_1, v_2, w\} \cup \{v_3, v_4, u\}$.

¹Die bildliche Darstellung des Graphen $\underline{K}_{2,3}$ auf Seite 7 kann als stilisierter griechischer Buchstabe θ aufgefasst werden.

Die übrigen Fälle sind als **Aufgabe** zu erledigen. \square

Zum Beweis des Satzes von Kuratowski genügt es deshalb zu zeigen, dass minore minimale nicht-planare Graphen einen zu \underline{K}_5 oder $\underline{K}_{3,3}$ homöomorphen Untergraphen enthalten. Dazu haben wir einige Lemmata vorzuschicken.

Lemma 2.6.4 *Ein minorer minimaler nicht-planarer Graph $\underline{G} = (V, E)$ enthält keine Knoten v mit $\deg v \leq 2$.*

Beweis. Isolierte Knoten können nicht auftreten, da der Graph \underline{G} zusammenhängend ist und mindestens fünf Knoten enthält.

Ist v ein Knoten mit $\deg v = 1$, so sei $\{u, v\}$ die einzige mit v inzidente Kante. Da \underline{G}/uv planar ist, gibt es einen zu \underline{G}/uv isomorphen Streckengraphen. Ist \tilde{u} der dem Knoten uv entsprechende Punkt, so kann man die von diesem Punkt ausgehenden Strecken um eine weitere ergänzen, die den Graphen sonst nicht trifft und hätte einen zu \underline{G} isomorphen Streckengraphen im Widerspruch zur Nichtplanarität von \underline{G} .

Nun sei v ein Knoten mit $\deg v = 2$ und es seien $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ die beiden mit v inzidenten Kanten. Nach Voraussetzung ist \underline{G}/uv planar. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\{u, w\} \notin E$: Dann ist \underline{G} isomorph zu dem planaren Graphen, der aus \underline{G}/uv durch Unterteilung der Kante $\{uv, w\}$ entsteht, also selbst planar im Widerspruch zur Voraussetzung.
2. $\{u, w\} \in E$: Es seien $\tilde{\underline{G}}$ ein zu \underline{G}/uv isomorpher ebener Graph und F eine Seite, zu deren Rand die Kante $\{uv, w\}$ gehört. Wir wählen einen Jordanbogen e , der den Punkt uv mit dem Punkt w verbindet und dessen innere Punkte ganz in dieser Seite liegen. Diesen Jordanbogen nehmen wir als weitere Kante zu dem Graphen $\tilde{\underline{G}}$ hinzu. Auch der erweiterte Graph ist eben. Unterteilen wir nun eine der beiden Kanten, die die Punkte uv und w verbinden, so erhalten wir einen zu \underline{G} isomorphen ebenen Graphen, wieder im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Lemma 2.6.5 *Es seien $\underline{G} = (V, E)$ ein minorer minimaler nicht-planarer Graph und $\{u, w\}$ eine Kante von \underline{G} . Dann ist der Graph $\underline{G} - u - w$ zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen, $\underline{G} - u - w$ zerfällt in mehrere Zusammenhangskomponenten $\underline{G}_1, \underline{G}_2, \dots, \underline{G}_k$. Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ bezeichnen wir mit $\bar{\underline{G}}_j$, den induzierten Untergraphen von \underline{G} , der von den Knoten aus $\bar{\underline{G}}_j$ zusammen mit den Knoten u und w aufgespannt wird. Dabei handelt es sich um echte, also wegen der vorausgesetzten Minimalität um planare Untergraphen von \underline{G} . Wir wählen nun induktiv zu den $\bar{\underline{G}}_j$ isomorphe ebene Graphen

\tilde{G}_j derart, dass wir sie wie „Puppen in der Puppe“ zu einem ebenen, zu \underline{G} isomorphen Graphen zusammensetzen können, im Widerspruch zur Nichtplanarität von \underline{G} . An \bar{G}_1 wird keine weitere Bedingung gestellt, aber dadurch sind die „Punkte“ u und w ein für alle mal festgelegt. Ist nun \tilde{G}_j gefunden, so wählen wir \tilde{G}_{j+1} so, dass es ganz in eine Seite von \tilde{G}_j hineinpasst, deren Rand die „Kante“ $\{u, w\}$ enthält. Damit das möglich ist, müssen wir vor allem dafür sorgen, dass die Kante $\{u, w\}$ zum Rand der unbeschränkten Seite von \tilde{G}_{j+1} gehört, was mit Hilfe zweifacher stereographische Projektion immer erreicht werden kann. \square

Lemma 2.6.6 *Es seien $\underline{G} = (V, E)$ ein minorer minimaler nicht-planarer Graph und $\{u, w\}$ eine Kante von \underline{G} . Dann enthält der Graph $\underline{G} - u - w$ keinen θ -Untergraphen.*

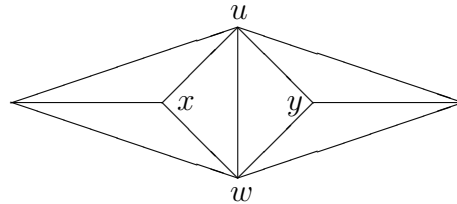
Beweis. Da jeder Minor von \underline{G} planar ist, können wir annehmen, dass \underline{G}/uw ein ebener Graph ist. Damit ist auch $\underline{G}' = \underline{G} - u - w = \underline{G}/uw - uw$ ein ebener Graph. Angenommen, \underline{G}' enthält einen θ -Untergraphen. Dann hat \underline{G}' mindestens drei Seiten und wir können weiter annehmen, dass der Punkt uw in einer beschränkten Seite L liegt. Der Rand von L enthält keinen θ -Untergraphen. Da aber ein θ -Untergraph existiert, gibt es eine Kante e die nicht zum Rand von L gehört. Damit gibt es im Rand von L einen einfachen Kreis \underline{K} , der den Punkt uw und die Kante e „trennt“. Wir können annehmen, dass der Punkt uw im Inneren und die Kante e im Äußeren des Kreises \underline{K} liegt. Wenn wir die allen „äußeren“ Kanten von \underline{K} entsprechenden Kanten aus \underline{G} entfernen, erhalten wir wegen der Minimalität \underline{G} einen planaren Graphen \bar{G} . Wir finden dann einen zu \bar{G} isomorphen ebenen Graphen \tilde{G} , dessen unbeschränkte Seite von dem Kreis \underline{K} berandet wird. Nehmen wir nun die äußeren Kanten von \underline{G}' hinzu, so haben wir einen zu \underline{G} isomorphen ebenen Graphen, im Widerspruch zur vorausgesetzten Nichtplanarität von \underline{G} . \square

Lemma 2.6.7 *Es seien $\underline{G} = (V, E)$ ein minorer minimaler nicht-planarer Graph und $\{u, w\}$ eine Kante von \underline{G} . Dann enthält der Graph $\underline{G} - u - w$ höchstens einen Knoten v mit $\deg v = 1$.*

Beweis. Angenommen, es gibt Knoten x und y mit $x \neq y$ vom Grad 1 in $\underline{G} - u - w$. Da diese Knoten in \underline{G} mindestens den Grad 3 haben, müssen sie beide zu beiden Knoten u und w benachbart sein. Damit erzeugen diese vier Knoten einen θ -Untergraphen von \underline{G} . Aufgrund des vorigen Lemmas kann muss jede weitere Kante mit mindestens einem dieser vier Knoten inzident sein, denn durch Herausnahme der Randknoten einer Kante $\{t, v\}$ mit $\{t, v\} \cap \{u, w, x, y\} = \emptyset$ entstände ein Graph, der einen θ -Untergraphen besitzt. Jeder weitere Knoten in \underline{G} , der ja mindestens den Grad 3 hat, muss also mindestens zu drei der vier Knoten u, w, x, y benachbart sein, also zu mindestens einem der Knoten x und

y . Diese beiden Knoten haben aber den Grad 3, also kann zu jedem von ihnen höchstens noch ein weiterer Knoten benachbart sein; also gibt es nur folgenden Möglichkeiten, die alle im Widerspruch zur Voraussetzung auf planare Graphen führen:

1. Es gibt keinen weiteren Knoten. Dann ist \underline{G} als Graph mit vier Knoten planar.
2. Es gibt genau einen weiteren Knoten, der sowohl zu x als auch zu y benachbart ist. Da x und y den Grad 3 haben, können sie in diesem Fall nicht benachbart sein. Wir haben also einen Untergraphen des vollständigen Graphen \underline{K}_5 , bei dem wenigstens eine Kante fehlt. Jeder solche Graph ist planar.
3. Es gibt zwei weitere Knoten, von denen einer zu x und der andere zu y benachbart ist, beide dann aber notwendigerweise zu u und w . Auch dieser Graph ist planar:



□

Zum Beweis der nächsten Lemmata benötigen wir einige neue Begriffe.

Definition 2.6.8 Es sei $\underline{G} = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

- Ein Knoten v ist ein *Schnittknoten*, wenn der Graph $\underline{G} - v$ nicht zusammenhängend ist.
- Ein Untergraph \underline{B} ist ein *Block*, wenn er
 - zusammenhängend ist,
 - mindestens zwei Knoten enthält,
 - keine Schnittknoten besitzt, und
 - maximal bezüglich dieser Eigenschaften ist.
- Ein Block ist ein *Endblock*, wenn er höchstens einen Schnittknoten von \underline{G} enthält.

Die einfachsten Formen von Blöcken sind Brücken und einfache Kreise. Wir notieren die folgenden offensichtlichen Tatsachen:

- Zwei verschiedene Blöcke eines Graphen haben höchstens einen Knoten gemeinsam, und dies ist ein Schnittknoten.

- Ein Knoten ist genau dann ein Schnittknoten, wenn er mindestens zwei Blöcken angehört.
- Jeder zusammenhängende Graph enthält wenigstens einen Endblock.
- Ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Blöcken enthält mindestens zwei Endblöcke.
- Die Endblöcke eines zusammenhängenden Graphen mit mindestens zwei Blöcken enthalten genau einen Schnittknoten des ganzen Graphen.

Lemma 2.6.9 *Ein Block eines Graphen, der weder eine Brücke noch ein einfacher Kreis ist, enthält einen θ -Untergraphen.*

Beweis. Es sei \underline{B} ein Block des Graphen \underline{G} , der weder eine Brücke noch ein einfacher Kreis ist.

Da wir einen Block haben, haben wir zwei Knoten u und w ; wegen des Zusammenhangs können wir annehmen, dass diese beiden Knoten benachbart sind. Da es sich nicht um eine Brücke handelt, ist $\{u, w\}$ eine Kreiskante; es sei \underline{K} ein einfacher Kreis, der die Kante $\{u, w\}$ enthält. Wegen der Maximalität muss \underline{K} zu dem Block \underline{B} gehören. Da \underline{B} auch kein Kreis sein soll, muss \underline{B} noch weitere Kanten enthalten. Wir unterscheiden zwei Fälle

1. Der Block \underline{B} enthält keine weiteren Knoten. Dann muss jede zusätzliche Kante zwei nicht benachbarte Knoten des Kreises verbinden und damit haben wir einen θ -Untergraphen.
2. Wir haben einen Knoten v in \underline{B} , der nicht zum Kreis \underline{K} gehört. Wegen des Zusammenhanges müssen die Knoten v und u durch einen Kantenweg verbunden sein. Da nach Voraussetzung aber $\underline{B} - u$ immer noch zusammenhängend ist, muss v noch mit mindestens einem Kantenweg verbunden sein, der den Knoten u nicht enthält. Durch Weglassen überflüssiger Knoten und Kanten erhält man daraus einen θ -Untergraphen. \square

Lemma 2.6.10 *Es seien $\underline{G} = (V, E)$ ein minorer minimaler nicht-planarer Graph und $\{u, w\}$ eine Kante von \underline{G} . Dann ist der Graph $\underline{G} - u - w$ ein einfacher Kreis.*

Beweis. Aus dem vorherigen Lemma zusammen mit Lemma 2.6.6 folgt das der Graph $\underline{G} - u - w$ nur einfache Kreise und Brücken als Blöcke enthält.

Nur eine Brücke, also eine einzelne Kante kann es nicht sein, denn dann hätte der Graph \underline{G} nur vier Knoten und wäre planar.

Es sei nun angenommen, dass der Graph $\underline{G} - u - w$ kein einfacher Kreis ist. Dann enthält er mindestens zwei Blöcke, also auch mindestens zwei Endblöcke. Nach Lemma 2.6.7 kann höchstens ein Endblock eine Brücke sein.

Also gibt es einen Endblock \underline{K} , der ein einfacher Kreis ist. Dieser enthält genau einen Schnittknoten v . Alle Knoten in $\underline{K} - v$ haben mindestens den Grad 3 in \underline{G} und sind damit in \underline{G} entweder zu u oder zu w oder zu beiden benachbart.

Da ein Kreis wenigstens drei Knoten enthält, haben wir wenigstens zwei Knoten v_1, v_2 in $\underline{K} - v$ und damit einen θ -Untergraphen in \underline{G} :

- Sind v_1 und v_2 etwa beide zu u benachbart, so entsteht durch Erweiterung von \underline{K} um den Knoten u und die Kanten $\{v_1, u\}, \{u, v_2\}$ ein θ -Untergraph.
- Ist v_1 zu u und v_2 zu w benachbart, so entsteht durch Erweiterung von \underline{K} um die Knoten u, w und die Kanten $\{v_1, u\}, \{u, w\}, \{w, v_2\}$ ein θ -Untergraph.

Jede weitere Kante von \underline{G} muss deshalb nach Lemma 2.6.6 mindestens einen Knoten von \underline{K} oder u oder w als Randknoten enthalten. Deshalb kann es keine Blöcke in $\underline{G} - u - w$ geben, die den Knoten v nicht enthalten, und die übrigen Blöcke, die den Knoten v enthalten, können keine Kreise sein, sondern es muss sich um Brücken handeln.

Da diese Brücken aber zugleich Endblöcke sind, haben sie jeweils einen Knoten vom Grad 1. Nach Lemma 2.6.7 kann es nur eine solche Brücke geben. Es handelt sich um eine einzelne Kante, deren einer Randknoten der Knoten v ist; mit t sei der zweite Randknoten dieser Kante bezeichnet.

Da $\underline{G} - t - v$ nach Lemma 2.6.6 keinen θ -Untergraphen enthält, kann es keine weiteren Knoten geben, das heißt, für $\underline{G} = (V, E)$ gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

- $V = \{t, u, v, v_1, v_2, w\},$
 $E = \{\{t, u\}, \{t, v\}, \{t, w\}, \{u, v_1\}, \{u, w\}, \{v, v_1\}, \{v, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, w\}\}$
- $V = \{t, u, v, v_1, v_2, w\},$
 $E = \{\{t, u\}, \{t, v\}, \{t, w\}, \{u, v_1\}, \{u, v_2\}, \{u, w\}, \{v, v_1\}, \{v, v_2\}, \{v, w\}, \{v_1, v_2\}\}$

Diese beiden Graphen sind aber planar. □

Beweis des Satzes von Kuratowski. Es seien $\underline{G} = (V, E)$ ein minorer minimaler nicht-planarer Graph und $\{u, w\}$ eine Kante von \underline{G} . Nach dem vorhergehenden Lemma ist $\underline{K} = \underline{G} - u - w$ ein einfacher Kreis. Jeder Knoten dieses Kreises ist benachbart entweder zu u oder zu w oder zu u und w . Wenn alle Knoten des Kreises mit beiden Knoten u und w verbunden sind, so ist der vollständige Graph \underline{K}_5 ein Minor, und wegen der Minimalität von \underline{G} ist dann \underline{G} selbst isomorph zu \underline{K}_5 . Hat der Kreis \underline{K} mehr als drei Kanten, so kann

man eine dieser Kanten kontrahieren und erhält einen Graphen gleichen Typs. Dies kann man solange tun, bis der Kreis nur noch drei Kanten besitzt.

Nun sei x ein Knoten des Kreises \underline{K} , der nur zu u , aber nicht zu w benachbart ist. Wir betrachten einen zu x benachbarten Knoten y des Kreises \underline{K} und behaupten: y ist nicht benachbart zu u (und damit notwendigerweise benachbart zu w).

Angenommen, y ist auch zu u benachbart. Dann betrachten wir $\underline{G} - \{y, u\}$ als ebenen Graphen, was wegen der Minimalität von \underline{G} möglich ist. Dabei können wir annehmen, dass der Punkt u innerhalb des Kreises \underline{K} liegt. Der Punkt w liegt dann auch innerhalb des Kreises \underline{K} , aber ist nicht benachbart zu x . Damit gehören die Kanten $\{u, x\}$ und $\{x, y\}$ zum Rand derselben Seite von $\underline{G} - \{y, u\}$, die Randpunkte u und y dieser Seiten können durch einen bis auf seine Endpunkte ganz in dieser Seite liegenden Jordanbogen verbunden werden. Nimmt einen solchen Jordanbogen als Kante hinzu, so erhält man einen zu \underline{G} isomorphen ebenen Graphen, im Widerspruch zu der vorausgesetzten Nicht-Planarität von \underline{G} .

Wenn also nicht alle Knoten des Kreises \underline{K} sowohl zu u , als auch zu v benachbart sind, dann sind sie abwechselnd zu u beziehungsweise zu w benachbart. Insbesondere muss damit die Anzahl der Knoten (und ebenso die Anzahl der Kanten) des Kreises \underline{K} gerade sein, und zwar mindestens vier. Nimmt man nun den Untergraphen, der aus allen Knoten, allen Kanten des Kreises \underline{K} und für vier aufeinander folgende Knoten von \underline{K} die Kanten, die sie mit u beziehungsweise w verbinden, so erhält man eine Unterteilung des vollständig bipartiten Graphen $\underline{K}_{3,3}$. \square

2.7 Ein anderes Planaritätskriterium

Alle Graphen in diesem Abschnitt sind schlicht und zusammenhängend. Die Kanten sind zwei-elementige Teilmengen der Knotenmenge.

Die Potenzmenge einer Menge M bildet mit der symmetrischen Differenz

$$A + B = A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

als Verknüpfung eine abelsche Gruppe, in der jedes Element die Ordnung 2 hat. Das neutrale Element ist die leere Menge, die Kommutativität ist klar und jedes Element ist offensichtlich zu sich selbst invers. Nur die Assoziativität bedarf einer genaueren Nachprüfung (Aufgabe). Das allgemeine Assoziativgesetz liefert dabei

$$\sum_{i=1}^n A_i = \left\{ a \in \bigcup_{i=1}^n A_i : \#\{i : a \in A_i\} \notin 2\mathbb{N} \right\};$$

speziell bedeutet dies:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A \setminus (B \cup C) \cup B \setminus (C \cup A) \cup C \setminus (A \cup B) \cap (A \cap B \cap C).$$

Eine derartige abelsche Gruppe lässt sich als Vektorraum über dem Körper \mathbb{Z}_2 aus zwei Elementen auffassen. Ein Vektorraum besitzt Basen und Dimension.

Es sei nun ein Graph $\underline{G} = (V, E)$ gegeben. Es sei \mathcal{K} die Menge der Kreise in \underline{G} . Wir betrachten die Abbildung $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \text{Pot}E$, die jedem Kreis die Menge der in ihm auftretenden Kanten zuordnet. Der von $\text{Bild}\Psi$ erzeugte Untervektorraum von $\text{Pot}E$, der Potenzmenge der Kantenmenge, heißt *Kreisraum* des Graphen \underline{G} . Wenn im folgenden von Kreisen gesprochen wird, so sind dabei immer die Bilder unter der Abbildung Ψ gemeint. Das bedeutet auch, dass zwei Kreise als äquivalent betrachtet werden, wenn sie aus den gleichen Kanten bestehen, es also nicht auf den Durchlaufungssinn und eventuelle Zusammensetzung ankommt. Zum Kreisraum gehören außer den Kreisen selbst offensichtlich auch die disjunkten Vereinigungen von Kreisen. Der Begriff „disjunkt“ bedeutet hier genauer *knotendisjunkt*, das heißt, es geht um die Vereinigungen von Mengen von Kreisen, die paarweise keine Knoten gemeinsam haben. Haben zwei Kreise Knoten gemeinsam, so hat in dem von ihnen erzeugten Untergraphen jeder Knoten geraden Grad; nach dem Satz von Euler 1.3.1 gibt es dann einen Eulerkreis, der die Vereinigung dieser beiden Kreise ist, und damit bilden diese beiden Kreise einen Kreis.

Der Name „Kreisraum“ ist durch die folgende Tatsache gerechtfertigt.

Lemma 2.7.1 *Die Summe von zwei verschiedenen disjunkten Vereinigungen von Kreisen ist selbst eine disjunkte Vereinigung von Kreisen.*

Beweis. Es seien \underline{K}_1 und \underline{K}_2 disjunkte Vereinigungen von Kreisen. Sie bilden zusammen mit den Endknoten der auftretenden Kanten Untergraphen des Graphen \underline{G} , in denen jeder Knoten geraden Grad hat; die jeweilige Grad-Funktionen werden mit deg_1 und deg_2 bezeichnet.

Es ist zunächst zu zeigen, dass jede Kante, die zu $\underline{K}_1 + \underline{K}_2$, also zu genau einer der beiden Kantenmengen gehört, in einem Kreis aus solchen Kanten liegt. Dazu sei $e_0 = v_0, v_1$ eine solche Kante; o.B.d.A. sei $e_0 \in \underline{K}_1$. Ferner sei

- $k_0 = \#\{e \in \underline{K}_1 \cap \underline{K}_2 : v_1 \in e\}$, die Zahl der Kanten, die v_1 als Endknoten besitzen und im Durchschnitt von \underline{K}_1 und \underline{K}_2 liegen,
- $k_1 = \#\{e \in \underline{K}_1 \setminus \underline{K}_2 : e \neq e_0, v_1 \in e\}$, die Zahl der von e_0 verschiedenen Kanten in $\underline{K}_1 \setminus \underline{K}_2$, die v_1 als Endknoten besitzen, und

- $k_2 = \#\{e \in \underline{K}_2 \setminus \underline{K}_1 : v_1 \in e\}$, die Zahl der Kanten in $\underline{K}_2 \setminus \underline{K}_1$, die v_1 als Endknoten besitzen.

Dabei sind $\deg_1 v_1 = k_0 + k_1 + 1$ und $\deg_2 v_1 = k_0 + k_2$ gerade Zahlen.

Ist nun k_0 ungerade, so ist auch k_2 ungerade, also von Null verschieden, und damit gilt $\{e \in \underline{K}_2 \setminus \underline{K}_1 : v_1 \in e\} \neq \emptyset$. Damit gibt es eine Kante $e_1 \in \underline{K}_2 \setminus \underline{K}_1$ mit $v_1 \in e_1$.

Ist k_0 gerade, so ist k_1 ungerade und es gibt eine Kante $e_1 \in \underline{K}_1 \setminus \underline{K}_2$ mit $v_1 \in e_1$.

Mit einer solchen Kante e_1 setzen wir nun den mit den mit e_0 beginnenden Kantenweg fort. Am zweiten Endknoten dieser Kante e_1 finden wir aus dem gleichen Grund eine passende Kante e_2 . Das können wir jedenfalls solange fortsetzen, bis wir entweder zu einem von v_0 verschiedenen Knoten v' gelangen, an dem wir schon einmal gewesen sind, oder zu dem Knoten v_0 , dem zweiten Endknoten der Kante e_0 .

1. Fall: Es sei K' die Menge der bis dahin zu wiederholten Erreichung des Knotens v' verbrauchten Kanten. Wir bezeichnen nun mit

- $k_0 = \#\{e \in \underline{K}_1 \cap \underline{K}_2 : v' \in e\}$, die Anzahl der Kanten im Durchschnitt von \underline{K}_1 und \underline{K}_2 mit dem Endknoten v' ,
- $k'_1 = \#\{e \in \underline{K}'_1 \cap \underline{K}_1 : v' \in e\}$, die Anzahl der schon verbrauchten Kanten von $\underline{K}_1 \setminus \underline{K}_2$ mit Endknoten v' ,
- $k'_2 = \#\{e \in \underline{K}'_2 \cap \underline{K}_2 : v' \in e\}$, die Anzahl der schon verbrauchten Kanten von $\underline{K}_2 \setminus \underline{K}_1$ mit Endknoten v' ,
- $k_1 = \#\{e \in \underline{K}_1 \setminus (\underline{K}'_1 \cup \underline{K}_2) : v_1 \in e\}$, die Anzahl der restlichen Kanten von \underline{K}_1 mit Endknoten v' und
- $k_2 = \#\{e \in \underline{K}_2 \setminus \underline{K}'_2 : v_1 \in e\}$, die Anzahl der restlichen Kanten von \underline{K}_2 mit Endknoten v' .

Wir haben jetzt $\deg_1 v' = k_0 + k'_1 + k_1$ und $\deg_2 v' = k_0 + k'_2 + k_2$, beides gerade Zahlen. Hier ist nun $k'_1 + k'_2$ ungerade, also eine der beiden Zahlen gerade, die andere ungerade. Damit ist auch von den beiden Zahlen $k_0 + k'_1$ und $k_0 + k'_2$ gerade und die andere ungerade. Da aber die Zahlen $k_0 + k'_1 + k_1$ und $k_0 + k'_2 + k_2$ beide gerade sind, muss eine der Zahlen k_1 oder k_2 ungerade, also von Null verschieden sein, und wir können das Verfahren fortsetzen.

2. Fall: Der Kreis ist geschlossen; damit ist nachgewiesen, dass die Kante e_0 in einem in $\underline{K}_1 + \underline{K}_2$ enthaltenen Kreis liegt. Gehören diesem Kreis alle Kanten in $\underline{K}_1 + \underline{K}_2$ an, so sind wir fertig. Andernfalls nehmen eine noch nicht verbrauchte Kante und setzen das Verfahren fort; sollten einer, oder auch schon beide Endknoten dieser Kante schon in einem

der vorher gefundenen Kreis vorkommen, so gelten die für den ersten Fall angestellten Überlegungen analog.

Zum Schluss stellen wir noch fest: Gibt es unter den gefundenen Kreisen solche, die Knoten gemeinsam haben, so können wir sie nach dem Eulerschen Satz zu einem Eulerkreis zusammensetzen. \square

Satz 2.7.2 *Der Kreisraum des Graphen $\underline{G} = (V, E)$ hat die Dimension $d = \#E - \#V + 1$.*

Eine Basis, eine so genannte Kreisbasis, kann man zum Beispiel auf folgende Weise gewinnen. Man wählt einen aufspannenden Baum (kreisloser zusammenhängender Untergraph, der alle Knoten enthält). Zwei verschiedene Knoten sind in diesem Baum durch genau einen Kantenzug verbunden. Der Baum enthält $\#V - 1$ Kanten. Die übrigen d Kanten $e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_d$ bilden zusammen mit den Kantenzügen, die ihre Endknoten verbinden, je einen Kreis K_j . Die Menge dieser Kreise ist linear unabhängig. Wenn gezeigt werden kann, dass sie den Kreisraum auch erzeugt, so ist sie eine Basis. Dazu sei K ein Element des Kreisraumes, also eine disjunkte Vereinigung von Kreisen. Wir bilden die Menge $J = \{j : e_j \in K\}$ und behaupten: $K = \sum_{j \in J} K_j$, was gleichbedeutend ist mit $K + \sum_{j \in J} K_j = 0$. Wäre aber $K + \sum_{j \in J} K_j \neq 0$, so wäre $K + \sum_{j \in J} K_j$ eine Vereinigung von Kreisen; das kann aber nicht sein, da die Menge $K + \sum_{j \in J} K_j$ nur aus Kanten des Baumes besteht. \square

Definition 2.7.3 Eine Kreisbasis ist eine *2-Basis*, wenn jede Kante in höchstens zwei Kreisen der Basis auftritt.

Satz 2.7.4 *Der vollständige Graph \underline{K}_5 besitzt keine 2-Basis.*

Beweis. Die Dimension des Kreisraumes ist $10 - 5 + 1 = 6$. Angenommen, C_1, C_2, \dots, C_6 ist eine 2-Basis. Es sei k die Anzahl der Kanten, die in genau zwei Kreisen dieser Basis vorkommen. Dann gilt:

$$\#C_1 + \#C_2 + \dots + \#C_6 = 2k + (10 - k) \geq 6 \cdot 3 = 18.$$

Die Ungleichung ergibt sich aus der Tatsache, dass ein Kreis in \underline{K}_5 mindestens drei Kanten enthält. Die Ungleichung vereinfacht sich zu $10 + k \geq 18$, also $k \geq 8$. Daraus folgt, dass $C_1 + C_2 + \dots + C_6$ höchstens zwei Kanten und damit keinen Kreis enthält, also verschwindet, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basiselemente. \square

Satz 2.7.5 *Der vollständige bipartite Graph $\underline{K}_{3,3}$ besitzt keine 2-Basis.*

Beweis. Die Dimension des Kreisraumes ist $9-6+1=4$. Angenommen, C_1, C_2, C_3, C_4 ist eine 2-Basis. Es sei k die Anzahl der Kanten, die in genau zwei Kreisen dieser Basis vorkommen. Dann gilt:

$$\#C_1 + \#C_2 + \#C_3 + \#C_4 = 2k + (9 - k) \geq 4 \cdot 4 = 16.$$

Die Ungleichung ergibt sich aus der Tatsache, dass ein Kreis in $\underline{K}_{3,3}$ mindestens vier Kanten enthält. Die Ungleichung vereinfacht sich zu $9 + k \geq 16$, also $k \geq 7$. Daraus folgt, dass $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ höchstens zwei Kanten und damit keinen Kreis enthält, also verschwindet, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basiselemente. \square

Wir bemerken noch, dass offensichtlich auch keine Unterteilung der Graphen \underline{K}_5 und $\underline{K}_{3,3}$ eine 2-Basis besitzt.

Satz 2.7.6 [MacLane 1937]. *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er eine 2-Basis besitzt.*

Beweisskizze. „ \implies “: Wir betrachten zunächst ebene Graphen ohne Schnittknoten. Dann wird jedes Gebiet von einem einfachen Kreis berandet. Es sei B die Menge der Kreise, die beschränkte Gebiete beranden. Nach der Eulerschen Polyederformel hat diese Menge die richtige Anzahl von Elementen. Eine Kante, die zum Rand des unbeschränkten Gebietes gehört, gehört zu genau einem Element von B , die anderen Kanten gehören zu genau zwei Elementen. Jede Summe von paarweise verschiedenen Kreisen ist ungleich Null, diese Kreise erzeugen ja einen ebenen Untergraphen, und die Kanten, die zum Rand des unbeschränkten Gebietes dieses Untergraphen gehören, können in der Summe nicht verschwinden. Damit ist die Menge B linear unabhängig, und da sie die richtige Zahl von Elementen hat, eine Basis.

Nun sei \underline{G} ein Graph mit einem Schnittknoten v . Der Graph $\underline{G} - v$ habe die Komponenten $\underline{G}'_1, \underline{G}'_2, \dots, \underline{G}'_k$. Mit $\underline{G}_1, \underline{G}_2, \dots, \underline{G}_k$ seien die Untergraphen von \underline{G} bezeichnet, die von $V'_j \cup \{v\}$ erzeugt werden, für $j = 1, 2, \dots, k$. Induktiv können wir annehmen, dass die Graphen \underline{G}_j 2-Basen besitzen. Ihre Vereinigung ist dann eine 2-Basis von \underline{G} .

„ \impliedby “: Die Eigenschaft, eine 2-Basis zu besitzen, vererbt sich auf Untergraphen (siehe das anschließende Lemma). Nach dem Satz von Kuratowski enthält besitzt ein nicht planarer Graph eine Unterteilung von \underline{K}_5 oder $\underline{K}_{3,3}$ als Untergraph. Diese Graphen haben keine 2-Basis, also kann auch der große Graph keine 2-Basis haben. \square

Die wesentliche Lücke im vorstehenden Beweis füllt zum Abschluss das folgende Lemma.

Lemma 2.7.7 *Jeder zusammenhängende Untergraph eines Graphen mit 2-Basis besitzt eine 2-Basis.*

Beweis. Es sei K_1, K_2, \dots, K_d eine 2-Basis des Graphen \underline{G} .

Wir betrachten zunächst das Weglassen einer Kante e und bezeichnen den erhaltenen Untergraphen mit \underline{G}' . Da dadurch der Zusammenhang nicht zerstört werden soll, handelt es sich nicht um eine Brücke, sondern eine Kreiskante. Sie gehört dann entweder zu einem Kreis K_j der Basis, oder zu genau zwei Kreisen K_j und K_k . Durch Weglassen der Kante erniedrigt sich die Dimension des Kreisraumes um 1.

Wären im ersten Fall die von K_j verschiedenen Elemente der Basis in dem Kreisraum von \underline{G}' linear abhängig, so wären sie es auch im Graphen \underline{G} . Also haben wir linear unabhängige Elemente in genügender Anzahl, das heißt, eine Basis. Die Eigenschaft 2-Basis zu sein, geht durch das Weglassen des Kreises K_j nicht verloren.

Im zweiten Fall nehmen wir zur Vereinfachung der Darstellung o.B.d.A. an, dass $j = 1$ und $k = 2$ gilt. Dann ist $K_1 + K_2, K_3, \dots, K_d$ wieder eine Menge von linear unabhängigen Elementen in genügender Anzahl, also eine 2-Basis des Kreisraumes von \underline{G}' .

Jetzt betrachten wir das Weglassen eines Knotens v und setzen $\underline{G}' = \underline{G} - v$. Da auch dabei der Zusammenhang nicht zerstört werden soll, handelt es sich nicht um einen Schnittknoten. Zunächst betrachten wir den Fall $\deg v = 1$. Dann gehört die einzige Kante mit v als Randknoten zu keinem Kreis. Der Knoten v und die Kante können ohne Folgen für den Kreisraum weggelassen werden. Auch in die Dimensionsformel ist in Ordnung: die beiden Variablen erniedrigen sich um 1, da sie entgegen gesetztes Vorzeichen haben, heben sich diese Änderungen gegenseitig auf. Im Fall $\deg v > 1$ muss jede Kante mit v als Randknoten eine Kreiskante sein, sonst würde durch das Weglassen von v der Zusammenhang gestört. In dem wir nacheinander Kanten mit v als Randknoten weglassen, erhalten wir aufgrund des bisher Bewiesenen immer nur Untergraphen, deren Kreisräume 2-Basen besitzen. \square