Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

8. Die exakte Cohomologiesequenz

f und analog g sind dann wohldefiniert. Man folgere nun:

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

<u>Bemerkung.</u> $(H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}), t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{B}})$ ist ein gerichtetes System abelscher Gruppen (dabei sei $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe über einem topologischen Raum X).

<u>Definition.</u> Sei $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen über dem topologischen Raum X.

$$H^q(X,\mathfrak{F}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$$

heißt die <u>q-te Čechsche Cohomologiegruppe von X</u> mit Werten in $\mathfrak{F}$.

<u>Bemerkung.</u> Für Garben $\mathfrak{F}$ ist die Restklassenbildung $t^{\mathfrak{U}}: H^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathfrak{F})$ injektiv. (Satz 4).

<u>Folgerung.</u> Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$ (bzw. $H^1(X,\mathcal{O}^*) = 0$). Dann ist auf X jedes additive (multiplikative) Cousin-Problem lösbar.

§ 8. Die exakte Cohomologiesequenz

<u>Definition</u> (Homomorphismus von Prägarben).
Seien $\mathfrak{F},\mathfrak{G}$ Prägarben auf dem topologischen Raum X. Ein <u>Homomorphismus</u> $\alpha: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$\alpha_U: \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{G}(U), \quad (U = \mathring{U} \subset X),$$

die mit den Restriktionen verträglich ist, d.h. für $V = \mathring{V} \subset U$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & \mathfrak{G}(U) \arrow[d, "\rho^U_V"] \\ \mathfrak{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"'] & \mathfrak{G}(V) \end{tikzcd}$$

kommutativ.

<u>Beispiele.</u> (i) Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit den Garben $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}^*$. Für $f \in \mathcal{O}(U)$ sei $\alpha_U(f) := e^{2\pi i f}$. Dann ist $\alpha = (\alpha_U)_{U=\mathring{U}\subset X}$ ein Homomorphismus $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$.
(ii) Sei $X = \mathring{X} \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{E}^{(q)}$ die Garbe der differenzierbaren Differentialformen vom Grad q. Die Ableitung d: $\mathcal{E}^{(q)} \longrightarrow \mathcal{E}^{(q+1)}$ ist ebenfalls ein Homomorphismus.
(iii) Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann sind die kanonischen Einbettungen $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}$, bzw. $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}$ Homomorphismen.
Sei $\alpha: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ ein Garbenhomomorphismus über X und $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann induziert α einen mit δ verträglichen Homomorphismus

$$\tilde{\alpha}_q: C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G}).$$

Daher gilt: $\tilde{\alpha}_q(Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})) \subset Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$
$\tilde{\alpha}_q(B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})) \subset B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$

Also induziert α eine Abbildung

$$\alpha^*: H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U},\mathcal{G})$$

und insbesondere eine ebenfalls mit α^* bezeichnete Abbildung

$$\alpha^*: H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{G}).$$

<u>Definition</u> (der exakten Prägarbensequenzen).
Eine Sequenz

$$\longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow$$

von Prägarben abelscher Gruppen über X heißt <u>exakte Prägarbensequenz</u> an der Stelle i, falls für jede offene Teilmenge $U \subset X$ die Sequenz von Gruppen

$$\mathcal{F}_{i-1}(U) \xrightarrow{\alpha_{i-1,U}} \mathcal{F}_i(U) \xrightarrow{\alpha_{i,U}} \mathcal{F}_{i+1}(U)$$

an der Stelle i exakt ist, d.h. $\operatorname{Ker} \alpha_{i,U} = \operatorname{Im} \alpha_{i-1,U}$.

<u>Bemerkung.</u> Ist $\alpha: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Prägarbenhomomorphismus, so gibt es stets Prägarben $\mathcal{R}$ und $\mathcal{H}$ sowie Homomorphismen $i: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{F}$, $\beta: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$, so daß die Prägarbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

an allen Stellen exakt ist.
Man wähle für $\mathcal{R}$ und $\mathcal{H}$ die durch

$$\mathcal{R}(U) = \operatorname{Ker}\,(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U))$$
$$\mathcal{H}(U) = \operatorname{Coker}\,(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U)) = \mathcal{G}(U)/\operatorname{Im} \alpha_U,$$

gegebenen Prägarben, die die gesuchten Prägarben bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen.

<u>Satz 1.</u> Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Prägarben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X und $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es für jedes $q \in \mathbb{N}$ <u>"verbindende Homomorphismen"</u>

$$\delta^*: H^q(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \longrightarrow H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}),$$

so daß die folgende Sequenz abelscher Gruppen ("Cohomologiesequenz") exakt ist:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_0^*} H^0(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_0^*} H^0(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_0^*} H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_1^*} H^1(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_1^*} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\beta_q^*} H^q(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_q^*} H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_{q+1}^*} H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_{q+1}^*} H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{H})$$

$$\xrightarrow{\delta_{q+1}^*} H^{q+2}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_{q+2}^*} \dots$$

<u>Beweis</u> (i) Konstruktion von δ_q^*: Die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0,$$

$(U = \overset{\circ}{U} \subset X)$ induziert das in den Zeilen exakte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_q"] \arrow[d, "\delta"] & C^q(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde{\beta}_q"] \arrow[d, "\delta"] & C^q(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_{q+1}"] \arrow[d, "\delta"] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde{\beta}_{q+1}"] \arrow[d, "\delta"] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{q+2}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_{q+2}"] & C^{q+2}(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde{\beta}_{q+2}"] & C^{q+2}(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sei nun $\xi \in H^q(\mathfrak{U},\mathcal{H})$ und $c \in Z^q(\mathfrak{U},\mathcal{H})$ ein repräsentierender Cozyklus. Da $\tilde{\beta}_q$ surjektiv ist, gibt es ein $b \in C^q(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ mit $\tilde{\beta}_q(b) = c$ und es gilt

$$\tilde{\beta}_{q+1}(\delta b) = \delta(\tilde{\beta}_q(b)) = \delta c = 0$$

$$\Rightarrow \exists\ a \in C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}): \tilde{\alpha}_{q+1} a = \delta b$$

und es folgt

$$\tilde{\alpha}_{q+2}(\delta a) = \delta(\tilde{\alpha}_{q+1}a) = \delta\delta b = 0$$

$$\Rightarrow \delta a = 0,$$

da $\tilde{\alpha}_{q+2}$ injektiv ist. Wir definierten nun

$$\delta^*_q\, \xi := a + B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}).$$

Diese Konstruktion ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten c und b.

Sei z.B. $c' \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$ mit $c-c' \in B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$.

$$\Rightarrow \exists\ f \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{H}):\ \delta f = c-c'$$

$$\Rightarrow \exists\ g \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{G}):\ \tilde{\beta}_{q-1}(g) = f, \text{ da } \tilde{\beta}_{q-1} \text{ surjektiv}$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}_q((b-b')-\delta g) = \tilde{\beta}_q b-\tilde{\beta}_q b'-\delta\tilde{\beta}_{q-1}g = (c-c')-(c-c') = 0$$

$$\Rightarrow \exists\ a'' \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}):\ \tilde{\alpha}_q a'' = b-b'-\delta g$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_{q+1}\delta a'' = \delta\tilde{\alpha}_q a'' = \delta b-\delta b' = \tilde{\alpha}_{q+1}a-\tilde{\alpha}_{q+1}a'$$

$$\Rightarrow a-a' = \delta a'' \in B^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}), \text{ da } \tilde{\alpha}_{q+1} \text{ injektiv.}$$

(ii)(a) Die Exaktheit in $H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$.

1. $\operatorname{Ker} \delta^*_q \subset \operatorname{Im} \beta^*_q$:

Sei $\xi \in H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$ mit $\delta^*_q\,\xi = 0$ und $c \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$ mit $\xi = [c]$. Mit den obigen Bezeichnungen gibt es ein $b \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ und ein $a \in Z^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ mit

$$\tilde{\beta}_q b = c,\ \tilde{\alpha}_{q+1}a = \delta b.$$

$$\delta^*_q\xi = [a] = 0 \Rightarrow \exists\ a' \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}):\ \delta a' = a$$

Es gilt

$$\delta(b-\tilde{\alpha}_q a') = \delta b - \tilde{\alpha}_{q+1}a = 0$$

Sei

$$\eta := [b-\tilde{\alpha}_q a']$$

Dann gilt $\beta^*_q\eta = \xi$, denn $\tilde{\beta}_q(b-\tilde{\alpha}_q a') = \tilde{\beta}_q b = c$. q.e.d.

2. $\operatorname{Im} \beta^*_q \subset \operatorname{Ker} \delta^*_q$:

Sei $\xi \in H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$ und $c \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$ mit $\xi = [c]$. Es gibt ein $b \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ mit $\tilde{\beta}_q b = c$. Da $\delta b = 0$ folgt nach Konstruktion von δ^*_q und aus der Injektivität von $\tilde{\alpha}_{q+1}$: $\delta^*_q\xi = 0$.

(b) Exaktheit von $H^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{H}) \xrightarrow{\delta^*_{q-1}} H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha^*_q} H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$

1. $\operatorname{Ker} \alpha^*_q \subset \operatorname{Im} \delta^*_{q-1}$:

Sei $\xi \in H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ mit $\xi = [c]$ und $\tilde{\alpha}_q c \in B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$, d.h. $\alpha^*_q\xi = 0$. Sei $b \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ mit $\delta b = \tilde{\alpha}_q c$. Es gilt

$$\delta\tilde{\beta}_{q-1}(b) = \tilde{\beta}_q\delta b = \tilde{\beta}_q\tilde{\alpha}_q c = 0,$$

also $\tilde{\beta}_{q-1}(b) \in Z^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$ und offensichtlich nach Konstruktion

$$\delta^*_{q-1}[\tilde{\beta}_{q-1}b] = \xi.$$

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\tilde{\beta}_{q-1}} & \tilde{\beta}_{q-1}b \\ \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\ c \xrightarrow{\tilde{\alpha}_q} \tilde{\alpha}_q c & & \end{array}$$

2. $\operatorname{Im} \delta^*_{q-1} \subset \operatorname{Ker} \alpha^*_q$:

Mit den obigen Bezeichnungen folgt für $\xi \in \operatorname{Im} \delta^*_{q-1}$, $\xi = [c]$ sofort

$$\tilde{\alpha}_q c = \delta b \in B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G}), \text{ d.h. } \alpha^*_q\xi = 0.$$

(c) Exaktheit von $H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha^*_q} H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta^*_q} H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$

1. $\operatorname{Ker} \beta^*_q \subset \operatorname{Im} \alpha^*_q$:

Sei $\xi \in H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$, $c \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ mit $\xi = [c]$ und $\beta^*_q\xi = 0$, d.h. $\tilde{\beta}_q c \in B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{H})$

$$\Rightarrow \exists\ b' \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{H}):\ \delta b' = \tilde{\beta}_q c$$

$$\Rightarrow \exists\ b \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{G}):\ \tilde{\beta}_{q-1}b = b' \text{ da } \tilde{\beta}_{q-1} \text{ surjektiv}$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}_q(c-\delta b) = \tilde{\beta}_q c-\delta\tilde{\beta}_{q-1}b = 0$$

$$\Rightarrow \exists\ a \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}):\ \tilde{\alpha}_q a = c-\delta b \text{ und}$$

$$\tilde{\alpha}_{q+1}\delta a = \delta\tilde{\alpha}_q a = \delta c-\delta\delta b = 0 \Rightarrow \delta a = 0, \text{ da } \tilde{\alpha}_{q+1} \text{ injektiv,}$$

also $a \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ und es gilt:

$$\alpha_q^*[a] = [c-\delta b] = [c] = \xi.$$

2. Im $\alpha_q^* \subset$ Ker β_q^*:
Sei $\xi \in H^q[\mathfrak{U},\mathfrak{G}]$, $c \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ mit $\xi = [c]$ und $b \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ mit $\tilde{\alpha}_q b = c$, d.h. $\alpha_q^*[b] = \xi$. Dann gilt $\tilde{\beta}_q c = \tilde{\beta}_q \tilde{\alpha}_q b = 0$, d.h. $\beta_q^*\xi = 0$.
q.e.d.

Durch Übergang zum induktiven Limes erhalten wir als

Korollar (Voraussetzungen wie im Satz 1).
Die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha_0^*} H^0(X,\mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta_0^*} H^0(X,\mathfrak{H}) \xrightarrow{\delta_0^*} H^1(X,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha_1^*} H^1(X,\mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta_1^*} \ldots$$

$$\xrightarrow{\beta_q^*} H^q(X,\mathfrak{H}) \xrightarrow{\delta_q^*} H^{q+1}(X,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha_{q+1}^*} H^{q+1}(X,\mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta_{q+1}^*} H^{q+1}(X,\mathfrak{H}) \xrightarrow{\delta_{q+1}^*}$$

$$H^{q+2}(X,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha_{q+2}^*} \ldots$$

ist exakt.

Definition. Sei $(\mathfrak{F},\rho)$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum X und $x \in X$. Dann ist $(\mathfrak{F}(U),\rho_V^U)_{\substack{U\ni x\\ U\supset V\ni x}}$ ein induktives System und

$$\mathfrak{F}_x := \varinjlim_{U\ni x} \mathfrak{F}(U)$$

heißt der "Halm von $\mathfrak{F}$ im Punkt x".

Bemerkung. Ein Prägarbenhomomorphismus $\alpha: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ induziert für jedes $x \in X$ einen Homomorphismus

$$\alpha_x: \mathfrak{F}_x \longrightarrow \mathfrak{G}_x.$$

Definition. Sei

$$\longrightarrow \mathfrak{F}_{i-1} \longrightarrow \mathfrak{F}_i \longrightarrow \mathfrak{F}_{i+1} \longrightarrow$$

eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X. Diese Sequenz heißt exakte Garbensequenz an der Stelle i, falls für jedes $x \in X$ die Sequenz

$$\mathfrak{F}_{i-1,x} \xrightarrow{\alpha_{i-1,x}} \mathfrak{F}_{i,x} \xrightarrow{\alpha_{i,x}} \mathfrak{F}_{i+1,x}$$

von abelschen Gruppen an der Stelle i exakt ist.

Bemerkung. Durch Übergang zum induktiven Limes erhält man, daß jede exakte Prägarbensequenz eine exakte Garbensequenz ist (für Garben), aber die Umkehrung ist i.a. falsch:
Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Da lokal der Logarithmus einer nirgends verschwindenden holomorphen Funktion existiert, ist $\mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$ eine exakte Garbensequenz. Aber für $X = \mathbb{C}^*$ ist $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ nicht surjektiv, da die Funktion $z \longmapsto z$ auf $\mathbb{C}^*$ keinen Logarithmus besitzt.

Satz 2. Zu jeder Prägarbe $\mathfrak{F}$ abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X gibt es eine Garbe $\hat{\mathfrak{F}}$ von abelschen Gruppen auf X und einen Homomorphismus $\mathfrak{F} \longrightarrow \hat{\mathfrak{F}}$, so daß die induzierte Abbildung $\mathfrak{F}_x \longrightarrow \hat{\mathfrak{F}}_x$ für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus ist. ($\hat{\mathfrak{F}}$ heißt die der Prägarbe $\mathfrak{F}$ zugeordnete Garbe).

Beweis. Für $U \subset X$, U offen wird definiert

$$w(\mathfrak{F})(U) := \prod_{x\in U} \mathfrak{F}_x$$

$w(\mathfrak{F})$ ist eine Garbe.
Sei $U = \mathring{U} \subset X$. $\varphi = (\varphi_x)_{x\in U} \in w(\mathfrak{F})(U)$ heißt verträglich, wenn zu jedem $a \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von a existiert und ein Element $f \in \mathfrak{F}(V)$, so daß

$$\varphi_x = \rho_x^V(f)$$

für alle $x \in V$. Dabei ist $\rho_x^V \colon \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ die kanonische Abbildung

$$\hat{\mathcal{F}}(U) := \{\omega \in w(\mathcal{F})(U) \colon \omega \text{ verträglich}\}$$
$$\iota \colon \mathcal{F} \longrightarrow w(\mathcal{F})(U)$$
$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow w(\mathcal{F})(U)$$
$$f \longmapsto (\rho_x^V(f))_{x \in U}$$

ι bildet $\mathcal{F}$ in $\hat{\mathcal{F}}$ ab.

Zu zeigen:

1) $\hat{\mathcal{F}}$ ist Garbe

2) $\iota_x \colon \mathcal{F}_x \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}_x$ ist ein Isomorphismus

Wir beweisen hier nur 1):

Sei $U = \overset{o}{U} \subset X$, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$,

$$\omega_i \in \hat{\mathcal{F}}(U_i) \text{ mit } \omega_i | U_i \cap U_j = \omega_j | U_i \cap U_j$$

für alle $i, j \in I$, wobei $\omega_i = (\omega_{ix})_{x \in U_i}$ verträglich.

Zu zeigen: Es existiert $\omega \in \hat{\mathcal{F}}(U)$ mit $\omega | U_i = \omega_i$.

Es gilt:

$$\omega_i | U_i \cap U_j = (\omega_{ix})_{x \in U_i \cap U_j}$$
$$\omega_j | U_i \cap U_j = (\omega_{jx})_{x \in U_i \cap U_j}$$

$\Rightarrow \omega_{ix} = \omega_{jx}$ für $x \in U_i \cap U_j$

$\Rightarrow$ Es existieren $\omega_x \in \mathcal{F}_x$, so daß $\omega_x = \omega_{ix}$ für $x \in U_i$

Setze $\omega := (\omega_x)_{x \in U}$. Dann gilt:

$\omega \in \hat{\mathcal{F}}(U)$ und $\omega | U_i = \omega_i$ nach Konstruktion

Garbenaxiom (I) ist für $\hat{\mathcal{F}}$ erfüllt:

Seien $\omega, \psi \in \hat{\mathcal{F}}(U)$ mit $\omega | U_i = \psi | U_i$ für alle $i \in I$.

Daraus folgt: für $x \in U$, das in einem U_i liegt gilt:

$$\omega_x = \psi_x$$

das heißt $\omega = \psi$.

Definition. Ein topologischer Raum X heißt parakompakt, falls jede offene Überdeckung eine lokalendliche Verfeinerung besitzt.

Bemerkung. Sei X topologischer Raum. Dann gilt:

a) X ist lokal kompakt und besitzt abzählbare Topologie $\Rightarrow$ X parakompakt

b) X metrisierbar $\Rightarrow$ X parakompakt

Satz 3. Sei X ein parakompakter topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen auf X. Dann gilt:

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong H^q(X, \hat{\mathcal{F}})$$

für alle $q \geq 0$.

Für einen Beweis siehe Kultze [17].

Satz 4. Sei X ein parakompakter topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine exakte Garbensequenz auf X. Dann ist die lange Cohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow$$
$$\dots \longrightarrow H^q(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

exakt.

Beweis. Für $U = \overset{o}{U} \subset X$ werde gesetzt:

$$\mathcal{H}'(U) := \mathcal{G}(U)/\alpha(\mathcal{F}(U))$$

$\mathcal{H}'$ ist Prägarbe abelscher Gruppen auf X und folgende Prägarbensequenz ist exakt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}' \longrightarrow 0$$

Davon wird die lange exakte Cohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}') \xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow$$

$$\ldots \longrightarrow H^q(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{H}') \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \ldots$$

induziert. Sei $\mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Abbildung. Die induzierte Abbildung

$$\mathcal{H}'_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$$

ist ein Isomorphismus, da

$$\mathcal{H}_x \cong \mathcal{G}_x/\alpha\mathcal{F}_x$$

gilt. Hieraus folgt mit Satz 3 für alle $q \in \mathbb{N}$

$$H^q(X,\mathcal{H}) \cong H^q(X,\mathcal{H}').$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes.

<u>Definition.</u> Eine Garbe $\mathcal{C}$ über dem topologischen Raum X heißt <u>azyklisch</u>, wenn

$$H^q(X,\mathcal{C}) = 0$$

für alle $q \geqslant 1$ gilt.
Eine exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^2 \longrightarrow \ldots$$

heißt azyklische Auflösung der Garbe $\mathcal{F}$ über X, falls alle Garben $\mathcal{C}^q$, $(q \in \mathbb{N})$, azyklisch sind.

<u>Satz 5</u> (Abstrakter Satz von de Rham).
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf dem parakompakten topologischen Raum X und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^2 \longrightarrow \ldots$$

eine azyklische Auflösung von $\mathcal{F}$. Dann stimmen die Cohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ mit der Homologie des Komplexes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \mathcal{C}^1(X) \longrightarrow \mathcal{C}^2(X) \longrightarrow$$

überein, d.h.

$$H^q(X,\mathcal{F}) \cong \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}^q(X) \longrightarrow \mathcal{C}^{q+1}(X))/\mathrm{Im}\,(\mathcal{C}^{q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{C}^q(X))$$

(Hierbei wird $\mathcal{C}^{-1} := 0$ gesetzt).

<u>Beweis.</u> Für $n \geqslant 0$ seien Garben $\mathcal{R}^n$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{R}^n := \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{C}^{n+1}).$$

Es gilt dann $\mathcal{R}^0 = \mathcal{F}$ und die Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{R}^{n+1} \longrightarrow 0$$

ist exakt für alle $n \geqslant 0$.
Also werden die langen exakten Cohomologiesequenzen für alle $n \geqslant 0$

$$\ldots \longrightarrow H^q(X,\mathcal{C}^n) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{R}^{n+1}) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X,\mathcal{R}^n) \longrightarrow H^{q+1}(X,\mathcal{C}^n) \longrightarrow \ldots$$

induziert, aus der für $q \geqslant 1$ folgt:

$$H^q(X,\mathcal{R}^{n+1}) \cong H^{q+1}(X,\mathcal{R}^n)$$

Daraus folgt:

$$H^q(X,\mathcal{F}) \cong H^1(X,\mathcal{R}^{q-1})$$

$$H^0(X,\mathcal{C}^{q-1}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{R}^q) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\mathcal{R}^{q-1}) \longrightarrow 0$$

ist exakt also gilt

$$H^1(X,\mathcal{R}^{q-1}) \cong \frac{H^0(X,\mathcal{R}^q)}{\mathrm{Im}\,(H^0(X,\mathcal{C}^{q-1}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{R}^q))}$$

Also:

$$H^q(X,\mathcal{F}) \cong \frac{\operatorname{Ker}\,(\mathcal{G}^q(X) \longrightarrow \mathcal{G}^{q+1}(X))}{\operatorname{Im}\,(\mathcal{G}^{q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{G}^q(X))}$$

Definition. Sei X eine reell differenzierbare Mannigfaltigkeit. $\Omega^p_{\mathbb{R}}(X)$ sei der Vektorraum aller reellen differenzierbaren Differentialformen vom Grad p auf X. Dann heißt

$$Rh^p(X,\mathcal{R}) := \frac{\operatorname{Ker}\,(\Omega^p_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}_{\mathbb{R}}(X))}{\operatorname{Im}\,(\Omega^{p-1}_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{d} \Omega^p_{\mathbb{R}}(X))}$$

die p-te de Rhamsche Gruppe von X.

Satz 6 (de Rham).
Sei X eine reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Dann gilt für alle $q \in \mathbb{N}$

$$Rh^q(X,\mathbb{R}) \cong H^q(X,\mathcal{R})$$

Beweis.

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \Omega^3 \xrightarrow{d} \dots$$

ist azyklische Auflösung der Garbe $\mathcal{R}$: die Exaktheit folgt aus dem Poincaréschen Lemma. Daß Ω^p azyklische Garben sind beweist man mit einer Teilung der 1 wie in Satz 2, § 7, für den Fall Ω^0. Daraus folgt mit dem abstrakten Satz von de Rham sofort die Behauptung

Bemerkung. X zusammenhängend $\Rightarrow H^0(X,\mathcal{R}) \cong \mathbb{R}$.

Definition. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit
$\mathcal{E}^{oq}$ sei die Garbe der differenzierbaren Differentialformen vom Typ (o,q) auf X. Dann heißt

$$Dolb^q(X) := \frac{\operatorname{Ker}\,(\mathcal{E}^{oq}(X) \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{oq+1}(X))}{\operatorname{Im}\,(\mathcal{E}^{oq-1}(X) \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{oq}(X))}$$

die q-te Dolbeaultsche Gruppe von X.

Satz 7 (Theorem von Dolbeault).
Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Dann gilt für $q \in \mathbb{N}$

$$H^q(X,\mathcal{O}) \cong Dolb^q(X).$$

Beweis.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E}^{oo} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{o1} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{o2} \xrightarrow{d''} \dots$$

ist exakte Garbensequenz wegen des Dolbeaultschen Lemmas. $\mathcal{E}^{oq}$ sind azyklisch, da $H^k(X,\mathcal{E}^{oq}) = 0$ für alle $k \geqslant 1$. Der Beweis dieser Tatsache verläuft wie in Satz 2, § 7. Aus dem abstrakten Satz von de Rham folgt die Behauptung.

Satz 8. Sei X ein offener Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$H^q(X,\mathcal{O}) = 0 \text{ für alle } q \geqslant 1$$

Beweis. Aus dem Lemma von Dolbeault (§ 5, Satz 2) folgt

$$Dolb^q(X) = 0 \text{ für alle } q \geqslant 1$$

Folgerungen.
a) $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$ bedeutet: jedes Cousin-I-Problem auf einem Polyzylinder ist lösbar
b) $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$

$$f \longmapsto e^{2\pi i f}$$

ist exakte Garbensequenz. Daraus folgt mittels der langen exakten Cohomologiesequenz

$$0 = H^1(X,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}) = 0$$

$$H^1(X,\mathcal{O}^*) \cong H^2(X,\mathbb{Z}) = 0, \text{ da X Polyzylinder.}$$

Daraus folgt wieder: Jedes Cousin-II-Problem auf X ist lösbar.

Satz 9. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie und $H^1(X,\mathbb{Z}) = 0$. Dann besitzt auf X jede nirgends verschwindende holomorphe Funktion einen (eindeutigen) Logarithmus.

Beweis.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

ist exakte Garbensequenz. Daraus folgt:

$$H^0(X,\mathcal{O}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) = 0$$

also:

$$\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}^*(X) \longrightarrow 0$$

$$f \longmapsto e^{2\pi i f} \qquad \text{exakt.}$$

Zusatz. Gilt $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$ und besitzt jede Funktion aus $\mathcal{O}^*(X)$ einen Logarithmus, so folgt $H^1(X,\mathbb{Z}) = 0$.

Beweis. Man betrachtet einen Abschnitt der langen exakten Cohomologiesequenz

$$\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}^*(X) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}) = 0$$

Daraus folgt: $(f \longmapsto e^{2\pi i f})$: $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}^*(X)$ surjektiv $\Leftrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) = 0$.

Welke Garben und der Satz von Leray

Definition. Eine Garbe $\mathfrak{F}$ von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum X heißt **welk,** wenn für jedes $U = \overset{\circ}{U} \subset X$ die Restriktion

$$\mathfrak{F}(X) \longrightarrow \mathfrak{F}(U)$$

surjektiv ist.

Satz 10. Ist $\mathfrak{F}$ eine welke Garbe auf X, dann gilt für $q \geq 1$ und jede offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X:

$$H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = 0$$

Beweis. Sei $q \geq 1$ und $\xi \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$.
(a) Ist $Y = \overset{\circ}{Y} \subset U_{i^*}$, $i^* \in I$, dann zerfällt ξ auf Y, d.h. es gibt ein $\eta \in C^{q-1}(\mathfrak{U}\cap Y,\mathfrak{F})$ mit $\delta\eta = \xi|Y$:
Es gilt

$$0 = (\delta\xi)_{i^* i_0 \ldots i_q} = \xi_{i_0 \ldots i_q} - \sum_{\alpha=0}^{q} (-1)^\alpha \xi_{i^* i_0 \ldots \hat{i}_\alpha \ldots i_q}$$

Sei

$$\eta_{i_0 \ldots i_{q-1}} := \xi_{i^* i_0 \ldots i_{q-1}} \Big| Y,$$

also

$$\eta = (\eta_{i_0 \ldots i_{q-1}}) \in C^{q-1}(\mathfrak{U}\cap Y,\mathfrak{F})$$

und daher

$$(\delta\eta)_{i_0 \ldots i_q} = \sum (-1)^\alpha \xi_{i^* i_0 \ldots \hat{i}_\alpha \ldots i_q} = \xi_{i_0 \ldots i_q}$$

für alle Indizes.

(b) $\mathfrak{M} := \{(Y,\eta) : Y = \overset{\circ}{Y} \subset X \text{ und } \eta \in C^{q-1}(\mathfrak{U}\cap Y,\mathfrak{F}) \text{ mit } \delta\eta = \xi|Y\}$
$\mathfrak{M}$ ist nichtleer nach (a). Eine Halbordnung auf $\mathfrak{M}$ ist gegeben durch $(Y,\eta) < (Y',\eta') :\Leftrightarrow Y \subset Y'$ und $\eta'|Y = \eta$.
Sei $\tilde{\mathfrak{M}}$ eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$.

$$\tilde{Z} := \bigcup \{Y : \exists\, \eta_Y \text{ mit } (Y,\eta_Y) \in \tilde{\mathfrak{M}}\}$$

Nach Definition von "<" und Garbenaxiom II gibt es ein $\tilde{\eta} \in C^{q-1}(\mathfrak{U} \cap \tilde{Z}, \mathfrak{F})$ mit $\tilde{\eta}|Y = \eta_Y$ und

$$(\delta\tilde{\eta})|Y = \delta(\tilde{\eta}|Y) = \delta\eta_Y = \xi|Y \text{ für alle } Y \text{ mit } (Y,\eta_Y) \in \tilde{\mathfrak{M}}.$$

Garbenaxiom 1 $\Rightarrow \delta\tilde{\eta} = \xi|\tilde{Z}$.
Also ist $(\tilde{Z},\tilde{\eta}) \in \mathfrak{M}$ obere Schranke von $\tilde{\mathfrak{M}}$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es dann ein maximales Element (Z,η) von $\mathfrak{M}$.

(c) Angenommen $Z \neq X \Rightarrow \exists\ i_o \in I$ mit $U_{i_o} \not\subset Z$. Sei $Y' := Z \cup U_{i_o}$.

(a) $\Rightarrow \exists\ a \in C^{q-1}(\mathfrak{U} \cap U_{i_o}, \mathfrak{F})$: $\delta a = \xi|U_{i_o}$ und es gilt auf $Z \cap U_{i_o} \subset U_{i_o}$: $\delta(\eta - a) = 0$.

<u>1. Fall: $q \geq 2$:</u> (a) $\Rightarrow \exists\ \mathfrak{b} \in C^{q-2}(\mathfrak{U} \cap Z \cap U_{i_o}, \mathfrak{F})$ mit $\delta\mathfrak{b} = \eta - a$.
$\mathfrak{F}$ welk $\Rightarrow \exists\ b \in C^{q-2}(\mathfrak{U} \cap U_{i_o}, \mathfrak{F})$ mit $b|Z \cap U_{i_o} = \mathfrak{b}$ (komponentenweise Fortsetzung). Daher ist

$$\eta' := \begin{cases} \eta & \text{auf } Z \\ a + \delta b & \text{auf } U_{i_o} \end{cases}$$

wohldefinierte $(q-1)$-Cokette auf Y' und es gilt:

$$\delta\eta' = \xi|Y', \quad \eta'|Z = \eta$$

<u>2. Fall $q = 1$:</u> $\delta(\eta - a) = 0 \Rightarrow \eta - a \in Z^0(\mathfrak{U} \cap Z \cap U_{i_o}) \cong \mathfrak{F}(Z \cap U_{i_o})$.
$\mathfrak{F}$ welk $\Rightarrow \exists\ b \in \mathfrak{F}(U_{i_o})$ mit $b|Z \cap U_{i_o} = \eta - a$.
b läßt sich als Element von $Z^0(\mathfrak{U} \cap U_{i_o}, \mathfrak{F}) \subset C^0(\mathfrak{U} \cap U_{i_o}, \mathfrak{F})$ auffassen.
Daher ist

$$\eta' := \begin{cases} \eta & \text{auf } Z \\ a + b & \text{auf } U_{i_o} \end{cases}$$

eine wohldefinierte 1-Cokette und wiederum gilt

$$\delta\eta' = \xi|Y, \quad \eta'|Z = \eta,$$

also $(Z,\eta) < (Y',\eta')$ und $Z \subsetneqq Y'$ im Widerspruch zur Maximalität von (Z,η).
Daher folgt $Z = X$ und es gibt ein $\eta \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ mit $\delta\eta = \xi$, d.h. $Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$.

<u>Satz 11.</u> Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Dann gibt es eine welke Auflösung von $\mathfrak{F}$, d.h. es gibt eine exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{W}_o \longrightarrow \mathfrak{W}_1 \longrightarrow \mathfrak{W}_2 \longrightarrow \ldots$$

wobei die $\mathfrak{W}_\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}$ welke Garben abelscher Gruppen auf X sind.

<u>Beweis.</u> $w(\mathfrak{F})$ sei die in Satz 2 definierte Garbe. $w(\mathfrak{F})$ ist offenbar welk und man hat den in Satz 2 angegebenen Garbenhomomorphismus

$$\iota: \mathfrak{F} \longrightarrow w(\mathfrak{F})$$

Es gilt sogar $\iota_x: \mathfrak{F}_x \longrightarrow \hat{\mathfrak{F}}_x$ ist injektiv für jedes $x \in X$ und da $\mathfrak{F}$ eine Garbe ist folgt

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\iota} \hat{\mathfrak{F}}$$

ist exakte Sequenz von Prägarben; also ist

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{W}_o,$$

exakte Garbensequenz, wobei $\mathfrak{W}_o := w(\mathfrak{F})$.
Induktiv sei die folgende exakte Garbensequenz bereits konstruiert:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{W}_o \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathfrak{W}_{l-1} \longrightarrow \mathfrak{W}_l$$

Hierbei seien $\mathfrak{W}_o, \ldots, \mathfrak{W}_l$ welk.

$$\mathfrak{F}_l := \mathfrak{W}_l / \widehat{\mathrm{Im}\,(\mathfrak{W}_{l-1} \longrightarrow \mathfrak{W}_l)}$$

Nach Satz 2 ist

$$\mathfrak{w}_{l-1} \longrightarrow \mathfrak{w}_l \longrightarrow \mathfrak{F}_l \longrightarrow 0$$

exakte Garbensequenz und daraus folgt die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{w}_o \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathfrak{w}_{l-1} \longrightarrow \mathfrak{w}_l \longrightarrow w(\mathfrak{F}_l)$$

Setze $\mathfrak{w}_{l+1} := w(\mathfrak{F}_l)$. Daraus folgt die Behauptung.

<u>Satz 12.</u> Sei

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & C^o_{II} & \longrightarrow & C^1_{II} & \longrightarrow & C^2_{II} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^o_I & \longrightarrow & C^{oo} & \longrightarrow & C^{o1} & \longrightarrow & C^{o2} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1_I & \longrightarrow & C^{1o} & \longrightarrow & C^{11} & \longrightarrow & C^{12} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^2_I & \longrightarrow & C^{2o} & \longrightarrow & C^{21} & \longrightarrow & C^{22} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

ein Doppelkomplex abelscher Gruppen, in dem alle Zeilen und Spalten bis auf diejeweils erste exakt seien. Dann gilt für alle $q \in \mathbb{N}$

$$H^q_I \cong H^q_{II}$$

wobei $H^q_I := \mathrm{Ker}\,(C^q_I \longrightarrow C^{q+1}_I)/\mathrm{Im}\,(C^{q-1}_I \longrightarrow C^q_I)$

$$H^q_{II} := \mathrm{Ker}\,(C^q_{II} \longrightarrow C^{q+1}_{II})/\mathrm{Im}\,(C^{q-1}_{II} \longrightarrow C^q_{II})$$

Der Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

<u>Corollar.</u> Sei X ein parakompakter topologischer Raum und $\mathfrak{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Sei

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{w}_o \longrightarrow \mathfrak{w}_1 \longrightarrow \mathfrak{w}_2 \longrightarrow \ldots$$

eine welke Auflösung von $\mathfrak{F}$. Dann gibt es Isomorphismen $\alpha^{(q)}$

$$\alpha^{(q)}: \frac{\mathrm{Ker}\,(\mathfrak{w}_q(X) \longrightarrow \mathfrak{w}_{q+1}(X))}{\mathrm{Im}\,(\mathfrak{w}_{q-1}(X) \longrightarrow \mathfrak{w}_q(X))} \xrightarrow{\sim} H^q(X,\mathfrak{F})$$

<u>Beweis.</u> Die Behauptung folgt direkt aus dem abstrakten Satz von de Rham, da welke Garben azyklisch sind nach Satz 10.

<u>Satz 13</u> (Leray).
Sei $\mathfrak{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf dem metrisierbaren topologischen Raum X und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt

$$H^q(U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_p}, \mathfrak{F}) = 0$$

für alle $q \geq 1$ und alle $(i_o,\ldots,i_p) \in I^{p+1}$, so sind die kanonischen Abbildungen

$$H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathfrak{F})$$

für alle $q \geq 0$ bijektiv.

<u>Beweis.</u> Sei

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{w}_o \longrightarrow \mathfrak{w}_1 \longrightarrow \mathfrak{w}_2 \longrightarrow \ldots$$

eine welke Auflösung von $\mathfrak{F}$. Die induzierten Abbildungen

$$C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{w}_p) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{w}_{p+1})$$

sind für alle $q,p \in \mathbb{N}$ mit der Corandableitung verträglich, d.h.

$$\begin{tikzcd}
C^q(\mathfrak{U},\mathcal{W}_p) \arrow[r] \arrow[d] & C^q(\mathfrak{U},\mathcal{W}_{p+1}) \arrow[d] \\
C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{W}_p) \arrow[r] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{W}_{p+1})
\end{tikzcd}$$

ist für $q,p \in \mathbb{N}$ kommutativ. Also ist folgendes Diagramm abelscher Gruppen kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{W}_0(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{W}_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathfrak{U},\mathcal{W}_0) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathfrak{U},\mathcal{W}_1) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathfrak{U},\mathcal{W}_0) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathfrak{U},\mathcal{W}_1) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Die erste Spalte bildet einen Komplex abelscher Gruppen. Alle anderen Spalten stellen exakte Sequenzen dar, da die Einbettungen

$$\mathcal{W}_i(X) \longrightarrow C^0(\mathfrak{U},\mathcal{W}_i)$$

injektiv sind, $\mathcal{W}_i(X) \cong Z^0(\mathfrak{U},\mathcal{W}_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und welke Garben azyklisch sind nach Satz 10.
Die erste Zeile bildet ebenfalls einen Komplex.

<u>Zwischenbehauptung.</u> Alle Zeilen des obigen Diagramms ab der zweiten sind exakte Sequenzen.

<u>Beweis.</u> Sei $q \geq 0$, $(i_0,\ldots,i_q) \in I^{q+1}$, $U_\iota := U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{F}(U_\iota) \longrightarrow \mathcal{W}_0(U_\iota) \longrightarrow \mathcal{W}_1(U_\iota) \longrightarrow \ldots$$

ist exakte Sequenz. Dies zeigt man wie folgt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}|U_\iota \longrightarrow \mathcal{W}_0|U_\iota \longrightarrow \mathcal{W}_1|U_\iota \longrightarrow \mathcal{W}_2|U_\iota \longrightarrow \ldots$$

ist welke Auflösung von $\mathcal{F}|U_\iota$. Da X metrisierbar ist, ist U_ι metrisierbar und daher parakompakt. Also folgt aus dem abstrakten Satz von de Rham und der Voraussetzung für $q \geq 0$:

$$0 = H^q(U_\iota,\mathcal{F}) = \frac{\operatorname{Ker}\,(\mathcal{W}_q(U_\iota) \longrightarrow \mathcal{W}_{q+1}(U_\iota))}{\operatorname{Im}\,(\mathcal{W}_{q-1}(U_\iota) \longrightarrow \mathcal{W}_q(U_\iota))}$$

Deshalb ist (*) exakt.
Daraus folgt die Exaktheit der Sequenzen

$$C^q(\mathfrak{U},\mathcal{W}_0) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U},\mathcal{W}_1) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U},\mathcal{W}_2) \longrightarrow \ldots$$

Da $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{W}_0$ eine exakte Garbensequenz ist, ist auch

$$0 \longrightarrow C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U},\mathcal{W}_0)$$

exakt. Also gilt die Zwischenbehauptung.
Nach dem Corollar zu Satz 12 gibt es Isomorphismen $\alpha^{(q)}$

$$\alpha^{(q)}: \frac{\operatorname{Ker}\,(\mathcal{W}_q(X) \longrightarrow \mathcal{W}_{q+1}(X))}{\operatorname{Im}\,(\mathcal{W}_{q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{W}_q(X))} \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F})$$

und es gilt

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\phi^{(q)}"'] & H^q(X,\mathcal{F}) \\
 & \dfrac{\operatorname{Ker}\,(\mathcal{W}_q(X) \longrightarrow \mathcal{W}_{q+1}(X))}{\operatorname{Im}\,(\mathcal{W}_{q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{W}_q(X))} \arrow[u, "\alpha^{(q)}"']
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Dabei bezeichnet $\phi^{(q)}$ den Isomorphismus, der im obigen Doppelkomplex abelscher Gruppen nach Satz 12 induziert wird. Die natürliche Abbildung ρ ist somit als Isomorphismus nachgewiesen.

§ 9. Kohärente Garben

<u>Definition.</u> Sei $(X,\mathcal{O})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit.
Eine <u>analytische Modulgarbe (oder $\mathcal{O}$-Modulgarbe) auf X</u> ist eine Garbe $\mathfrak{F}$ von abelschen Gruppen zusammen mit einer $\mathcal{O}$-Modulstruktur, d.h. für jede offene Menge $U \subset X$ ist eine Multiplikation

$$\mathcal{O}(U) \times \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(U)$$

gegeben, die $\mathfrak{F}(U)$ zu einem $\mathcal{O}(U)$-Modul macht und die mit den Beschränkungsabbildungen verträglich ist, d.h. für $V \subset U$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \times \mathfrak{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{O}(V) \times \mathfrak{F}(V) \arrow[r] & \mathfrak{F}(V) \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Anmerkung: Diese Definition läßt sich allgemeiner für den Fall: X ist beliebiger topologischer Raum, $\mathcal{O}$ beliebige Garbe von Ringen, treffen.

<u>Beispiele.</u>
a) $\mathcal{O}^n$ ist $\mathcal{O}$-Modulgarbe
b) <u>Idealgarben.</u>
Sei $\mathfrak{J} \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{O}(U) \times \mathfrak{J}(U) \longrightarrow \mathfrak{J}(U)$ sei die Ringmultiplikation.

<u>Beispiel einer Idealgarbe:</u>
Sei $(X,\mathcal{O})$ komplexe Mannigfaltigkeit, $A \subset X$ beliebige Teilmenge.
Für $U = \mathring{U} \subset X$ wird definiert:

$$\mathfrak{J}(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) \colon f|U \cap A = 0\}$$