Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

7. Čechsche Cohomologiegruppen

§ 7. Čechsche Cohomologiegruppen

Definition. Sei $\mathfrak{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum X und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X. Dann heißt

$$C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) := \prod_{(i_o,\dots,i_q)\in I^{q+1}} \mathfrak{F}(U_{i_o}\cap\dots\cap U_{i_q})$$

die Gruppe der q-Coketten mit Werten in $\mathfrak{F}$ bezüglich $\mathfrak{U}$ für $q \in \mathbb{N}$. Setze $C^{-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) := 0$.

Definition (Corandableitung). Die Corandableitung ist eine Abbildung

$$\delta\colon C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}),$$

die wie folgt definiert ist: Sei $\xi \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, d.h.

$$\xi = (\xi_{i_o\dots i_q})_{(i_o,\dots,i_q)\in I^{q+1}}$$

wobei

$$\xi_{i_o\dots i_q} \in \mathfrak{F}(U_{i_o}\cap\dots\cap U_{i_q}).$$

Es werde gesetzt

$$\eta_{j_o\dots j_{q+1}} := \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k (\xi_{j_o\dots\hat{j}_k\dots j_{q+1}} | U_{j_o}\cap\dots\cap U_{j_{q+1}}).$$

Hierin ist $\xi_{j_o\dots\hat{j}_k\dots j_{q+1}}|U_{j_o}\cap\dots\cap U_{j_{q+1}}$ die Beschränkung von

$$\xi_{j_o\dots\hat{j}_k\dots j_{q+1}} \in \mathfrak{F}(U_{j_o}\cap\dots\cap\hat{U}_{j_k}\cap\dots\cap U_{j_{q+1}})$$

nach $\mathfrak{F}(U_{j_o}\cap\dots\cap U_{j_{q+1}})$.

$$\delta\xi := \eta := (\eta_{j_o\dots j_{q+1}})_{(j_o,\dots,j_{q+1})\in I^{q+2}}$$

Bemerkung. Es gilt:

$$\delta\circ\delta = 0.$$

Definition.

$$Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) := \operatorname{Ker}\,(C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}))$$

ist die Menge der q-Cozyklen mit Werten in $\mathfrak{F}$ bezüglich $\mathfrak{U}$.

$$B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) := \operatorname{Im}\,(C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta} C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}))$$

ist die Menge der q-Coränder mit Werten in $\mathfrak{F}$ bezüglich $\mathfrak{U}$. Wegen $\delta\circ\delta = 0$ gilt $B^q \subset Z^q$.

$$H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) := Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})/B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$$

heißt q-te Čechsche Cohomologiegruppe mit Werten in $\mathfrak{F}$ der Überdeckung $\mathfrak{U}$.

Spezialfälle:

i) $q = 0$. Es ist $B^o(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = 0$ nach Definition.
Beschreibung von $Z^o(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$:
Sei $(f_i)_{i\in I} \in C^o(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, d.h. $f_i \in \mathfrak{F}(U_i)$.
$(f_i)_{i\in I} \in Z^o(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \Leftrightarrow (\delta f)_{(i,j)\in I^2} = 0$, d.h. $f_i = f_j$ über $U_i\cap U_j$.

ii) $q = 1$.
Sei $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2} \in C^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, d.h. $f_{ij} \in \mathfrak{F}(U_i\cap U_j)$
(f_{ij}) ist ein Cozyklus genau dann, wenn gilt

$$f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$$

über $U_i\cap U_j\cap U_k$ für alle $i,j,k \in I$, denn:

$$(\delta f)_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}.$$

Es gilt: 1-Cozyklen sind antisymmetrisch, d.h.

$$f_{ij} = - f_{ji} \quad \text{für alle } i,j \in I.$$

Beweis. $f_{ii}+f_{ii} = f_{ii} \Rightarrow f_{ii} = 0$ für alle $i \in I \Rightarrow f_{ij}+f_{ji} = f_{ii} = 0$.
Ein Cozyklus $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ ist genau dann ein Corand, wenn $f_i \in \mathfrak{F}(U_i)$ existieren mit

$$f_{ij} = f_i - f_j$$

über $U_i \cap U_j$ für alle $i,j \in I$. Man sagt dann, der Cozyklus "zerfällt".
$H^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = 0 \Leftrightarrow$ Jeder Cozyklus zerfällt

Satz 1. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{C} = (U_i, f_i)_{i\in I}$ eine additive (bzw. multiplikative) Cousinverteilung auf X. Dann bildet die Familie

$$f_{ij} := f_i - f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j), \quad i,j \in I$$
$$(\text{bzw. } f_{ij} := \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j), \quad i,j \in I)$$

einen Cozyklus aus $Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$(bzw. aus $Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}^*)$). Genau dann ist $\mathfrak{C}$ lösbar, wenn dieser Cozyklus zerfällt bezüglich der Garbe $\mathcal{O}$ (bzw. $\mathcal{O}^*$).

Beweis (additiver Fall, der Beweis für den multiplikativen Fall verläuft analog):
i) $f_{ij}+f_{jk} = (f_i-f_j) + (f_j-f_k) = f_i-f_j = f_{ij}$ über $U_i \cap U_j \cap U_k$.
Daraus folgt: $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ ist ein Cozyklus.

ii) $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ zerfalle bezüglich $\mathcal{O}$.
$\Rightarrow f_{ij} = g_i-g_j$, wobei $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ für alle $i \Rightarrow f_i-f_j = g_i-g_j \Rightarrow$
$\Rightarrow f_i-g_i = f_j-g_j$ in $U_i \cap U_j$
Es gibt daher in $F \in \mathfrak{m}(X)$ mit $F|U_i = f_i-g_i$ für alle $i \in I$, da $\mathfrak{m}$ Garbe. Also ist $\mathfrak{C}$ lösbar.

iii) Besitze $\mathfrak{C}$ nun eine Lösung $F \in \mathfrak{m}(X)$.
$\Rightarrow -F|U_i + f_i =: g_i \in \mathcal{O}(U_i)$
$\Rightarrow f_i-f_j = g_i-g_j$ in $U_i \cap U_j$
$\Rightarrow f_{ij} = g_i-g_j$, d.h. $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ zerfällt holomorph.

Corollar. Gilt $H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}) = 0$ (bzw. $H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}^*) = 0$), so ist jedes additive (bzw. multiplikative) Cousin-Problem zur Überdeckung $\mathfrak{U}$ lösbar.

Satz 2. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie und $\mathcal{E}$ die Garbe der (beliebig oft) differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf X. Dann gilt für jede offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ von X und jede natürliche Zahl $q \geq 1$

$$H^q(\mathfrak{U},\mathcal{E}) = 0.$$

Beweis. Es existiert eine $\mathfrak{U}$ untergeordnete Teilung der Eins $(\eta_i)_{i\in I}$, d.h. es gilt
i) $\eta_i \in \mathcal{E}(X)$, supp $(\eta_i) \subset\subset U_i$
ii) (supp $\eta_i)_{i\in I}$ ist lokalendlich
iii) $0 \leq \eta_i \leq 1$ für alle $i \in I$
iv) $\sum_{i\in I} \eta_i = 1$ auf X

Sei $\xi = (\xi_{i_o\ldots i_q})_{(i_o,\ldots,i_q)\in I^{q+1}} \in Z^q(\mathfrak{U},\mathcal{E})$.

Unter $\eta_i \xi_{ii_o\ldots i_{q-1}}$ werde die Fortsetzung durch Null dieses Elements aus $\mathcal{E}(U_i \cap U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_{q-1}})$ auf $U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_{q-1}}$ verstanden.

Diese (differenzierbare) Fortsetzung ist möglich, da supp $\eta_i \subset\subset U_i$.

$$\zeta_{i_o\ldots i_{q-1}} := \sum_{i\in I} \eta_i \xi_{ii_o\ldots i_{q-1}}$$

$$\zeta := (\zeta_{i_o\ldots i_{q-1}})_{(i_o,\ldots,i_{q-1})\in I^q}$$

Damit gilt: $\delta\zeta = \xi$.

Beweis.

$$(\delta\zeta)_{i_0\dots i_q} = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \zeta_{i_0\dots\hat{i}_k\dots i_q} =$$

$$= \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \sum_{i\in I} \eta_i \xi_{ii_0\dots\hat{i}_k\dots i_q} =$$

$$= \sum_{i\in I} \eta_i \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \xi_{ii_0\dots\hat{i}_k\dots i_q} =$$

$$= \sum_{i\in I} \eta_i \xi_{i_0\dots i_q} =$$

$$= \xi_{i_0\dots i_q},$$

wobei beachtet wurde, daß gilt:

$$0 = (\delta\xi)_{ii_0\dots i_q} = \xi_{i_0\dots i_q} - \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \xi_{ii_0\dots\hat{i}_k\dots i_q}.$$

Corollar. Sei X ein offener Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ und $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gilt

$$H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}) = 0$$

Insbesondere ist also jede Cousin-I-Verteilung auf X lösbar.

Beweis. Sei $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}) \subset Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{E})$. Nach Satz 2 gibt es $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ mit

$$f_{ij} = g_i - g_j \text{ über } U_i \cap U_j.$$

Da

$$0 = d''f_{ij} = d''g_i - d''g_j \text{ über } U_i \cap U_j,$$

existiert eine Differentialform $\alpha \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ mit

$$\alpha|U_i = d''g_i \text{ , } d''\alpha = 0$$

Lemma von Dolbeault $\Rightarrow \exists\psi \in \mathcal{E}(X)$ mit $d''\psi = \alpha$.
Die Funktionen $f_i := g_i - \psi$ sind holomorph über U_i, da $d''f_i = 0$; und $f_{ij} = f_i - f_j$ über $U_i \cap U_j$, d.h. (f_{ij}) zerfällt holomorph.

Definition. Seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ und $\mathfrak{B} = (V_\alpha)_{\alpha\in A}$ offene Überdeckungen eines topologischen Raumes X. $\mathfrak{B}$ heißt "feiner" als $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{B} < \mathfrak{U}$), falls es eine Abbildung $\tau\colon A \longrightarrow I$ gibt, so daß

$$V_\alpha \subset U_{\tau\alpha} \text{ für alle } \alpha \in A.$$

Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Dann induziert τ eine Abbildung

$$t\colon C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{B},\mathcal{F}).$$

Sei

$$\xi = (\xi_{i_0\dots i_q}) \in C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}),$$

d.h. $\xi_{i_0\dots i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap\dots\cap U_{i_q})$.
Da $V_{\alpha_0} \cap\dots\cap V_{\alpha_q} \subset U_{\tau\alpha_0} \cap\dots\cap U_{\tau\alpha_q}$, ist durch

$$t\xi = (\eta_{\alpha_0\dots\alpha_q})$$

wobei

$$\eta_{\alpha_0\dots\alpha_q} := \xi_{\tau\alpha_0\dots\tau\alpha_q} \big| V_{\alpha_0} \cap\dots\cap V_{\alpha_q}$$

ein Gruppenhomomorphismus wohldefiniert. Diese Abbildung ist verträglich mit dem Corandoperator δ, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\delta"'] & C^q(\mathfrak{B},\mathcal{F}) \arrow[d, "\delta"] \\ C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "t"'] & C^{q+1}(\mathfrak{B},\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Daraus folgt

$$t(Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})) \subset Z^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$$

$$t(B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})) \subset B^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F}).$$

<u>Satz.</u> t induziert eine Abbildung

$$t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}: H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$$

und diese Abbildung ist unabhängig von der Auswahl der Verfeinerungsabbildung $\tau: A \longrightarrow I$.

<u>Beweis.</u> Seien $\tau_1,\tau_2: A \longrightarrow I$ Verfeinerungsabbildungen und t_1,t_2 die induzierten Homomorphismen. Sei $V := V_{\alpha_0} \cap \ldots \cap V_{\alpha_{q-1}}$. Es gilt

$$V \subset U_{\tau_1\alpha_0} \cap \ldots U_{\tau_1\alpha_k} \cap U_{\tau_2\alpha_k} \cap \ldots \cap U_{\tau_2\alpha_{q-1}}$$

für $k = 0,\ldots,q-1$. Für $f \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ sei

$$(h^q f)_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}} := \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k f_{\tau_1\alpha_0,\ldots,\tau_1\alpha_k,\tau_2\alpha_k,\ldots,\tau_2\alpha_{q-1}}\Big|V$$

Die so konstruierten <u>"Homotopie-Operatoren"</u>

$$h^q: C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow C^{q-1}(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$$

genügen der Gleichung:

$$\delta h^q + h^{q+1}\delta = t_1 - t_2,$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \arrow[r, "\delta"] & C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dl, dashed, "h^q"'] \arrow[d, shift right, "t_1"'] \arrow[d, shift left, "t_2"] & C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "h^{q+1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & C^{q-1}(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \arrow[r, "\delta"'] & C^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \arrow[r, "\delta"'] & C^{q+1}(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

und für $f \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ erhalten wir

$$t_1f - t_2f = \delta h^q f + h^{q+1}\underbrace{\delta f}_{=0} \in B^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \text{ q.e.d.}$$

<u>Satz 3.</u> Sei $\mathfrak{F}$ eine Garbe über dem topologischen Raum X und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{F}(X) \longrightarrow Z^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \cong H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$$

$$f \longmapsto (f|U_i)_{i\in I}$$

ein Isomorphismus. Ist $\mathfrak{V}$ eine feinere offene Überdeckung von X als $\mathfrak{U}$, so ist die Abbildung

$$H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$$

ein Isomorphismus.

<u>Beweis.</u> Injektivität und Surjektivität folgen aus dem Garbenaxiomen, die zweite Aussage aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{F}(X) \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \arrow[rr] & & H^0(\mathfrak{V},\mathfrak{F})
\end{tikzcd}$$

Der Satz gilt nicht für Prägarben.

<u>Satz 4.</u> Seien $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$ offene Überdeckungen eines topologischen Raumes X. Dann ist für jede Garbe $\mathfrak{F}$ auf X die Abbildung

$$H^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$$

injektiv.

<u>Bemerkung.</u> Für $q \geqslant 2$ ist $H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$ i.a. nicht injektiv.

<u>Beweis</u> (des Satzes). Sei

$$t: Z^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$$

die von der Verfeinerungsabbildung τ induzierte Abbildung,

$\xi \in Z^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ und $t\xi = \eta$,

$$\eta = (\eta_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \text{ mit } \eta_{\alpha\beta} = \xi_{\tau\alpha,\tau\beta}|V_\alpha \cap V_\beta .$$

$t\xi$ zerfalle, d.h.

$$\eta_{\alpha\beta} = g_\alpha - g_\beta;\ g_\alpha \in \mathfrak{F}(V_\alpha),\ g_\beta \in \mathfrak{F}(V_\beta).$$

In $U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta$ gilt:

$$g_\alpha - g_\beta = \xi_{\tau\alpha,\tau\beta} = \xi_{\tau\alpha,i} + \xi_{i,\tau\beta} = \xi_{\tau\alpha,i} - \xi_{\tau\beta,i}$$

$$\Rightarrow g_\alpha - \xi_{\tau\alpha,i} = g_\beta - \xi_{\tau\beta,i} \text{ über } (U_i \cap V_\alpha) \cap (U_i \cap V_\beta).$$

$(U_i \cap V_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist eine offene Überdeckung von U_i, nach Garbenaxiom II gibt es ein $f_i \in \mathfrak{F}(U_i)$ mit

$$f_i|U_i \cap V_\alpha = g_\alpha - \xi_{\tau\alpha,i}$$

und in $U_i \cap U_j \cap V_\alpha$ gilt:

$$\xi_{ij} = \xi_{i,\tau\alpha} + \xi_{\tau\alpha,j} = (f_i - g_\alpha) + (g_\alpha - f_j) = f_i - f_j,$$

d.h. (ξ_{ij}) zerfällt.

Der induktive Limes.

Eine Menge I heißt "nach unten gerichtet", wenn es in I eine zweistellige Relation $\leq$ gibt mit den Eigenschaften:

(1) $i \leq j$ und $j \leq i \Leftrightarrow i = j$

(2) $i \leq j,\ j \leq k \Rightarrow i \leq k$

(3) für $(i,j) \in I^2$ gibt es ein $k \in I$ mit $k \leq i,\ k \leq j$.

Unter einem "gerichteten System" (A_i, ψ_i^j) abelscher Gruppen verstehen wir eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ abelscher Gruppen über einer nach unten gerichteten Indexmenge I und Gruppenhomomorphismen $\psi_i^j\colon A_j \longrightarrow A_i$, $i \leq j$, mit der Eigenschaft

$$\psi_i^i = \mathrm{id}_{A_i} \text{ und } \psi_k^i = \psi_k^j \circ \psi_j^i \text{ für } k \leq j \leq i.$$

Die abelsche Gruppe $A := \varinjlim A_i$ sei wie folgt definiert:

$$A := \dot{\cup} A_i / \sim$$

für $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ gelte dabei

$$a_i \sim a_j :\Leftrightarrow \exists k \in I,\ k \leq i,\ k \leq j\colon \psi_k^i a_i = \psi_k^j a_j .$$

Die Addition auf A ist folgendermaßen erklärt.
Seien $\alpha = [a_i]$, $\beta = [\beta_j] \in A$. Nach (3) gibt es ein $k \in I$ mit $k \leq i$, $k \leq j$, daher ist

$$\alpha + \beta := [\psi_k^i a_i + \psi_k^j \beta_j]$$

sinnvoll. Die Wohldefiniertheit der Addition ist leicht nachprüfbar, wie auch Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Äquivalenzrelation $\sim$.
A heißt der "induktive Limes" des Systems (A_i, ψ_i^j).

Bemerkung. Der induktive Limes von exakten Sequenzen ist exakt.
Zum Beweis betrachte man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i & \xrightarrow{g_i} & C_i & & \mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, g_i \\
\downarrow \varpi_j^i & & \downarrow \psi_j^i & & \downarrow \zeta_j^i & & \\
A_j & \xrightarrow{f_j} & B_j & \xrightarrow{g_j} & C_j & & \mathrm{Im}\, f_j = \mathrm{Ker}\, g_j \\
\downarrow \varpi^j & & \downarrow \psi^j & & \downarrow \zeta^j & & \\
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & &
\end{array}$$

Dabei sind $\varpi^j, \psi^j, \zeta^j$ die kanonischen Homomorphismen.
Für $\alpha \in A$, $\alpha = \varpi^j(a_j)$ sei

$$f(\alpha) := \psi^j \circ f_j(a_j)$$

f und analog g sind dann wohldefiniert. Man folgere nun:
Im f = Ker g.

<u>Bemerkung.</u> $(H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}),t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{B}})$ ist ein gerichtetes System abelscher Gruppen (dabei sei $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe über einem topologischen Raum X).

<u>Definition.</u> Sei $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen über dem topologischen Raum X.

$$H^q(X,\mathfrak{F}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$$

heißt die <u>q-te Čechsche Cohomologiegruppe von X</u> mit Werten in $\mathfrak{F}$.

<u>Bemerkung.</u> Für Garben $\mathfrak{F}$ ist die Restklassenbildung $t^{\mathfrak{U}}: H^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathfrak{F})$ injektiv. (Satz 4).

<u>Folgerung.</u> Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$ (bzw. $H^1(X,\mathcal{O}^*) = 0$). Dann ist auf X jedes additive (multiplikative) Cousin-Problem lösbar.

<u>§ 8. Die exakte Cohomologiesequenz</u>

<u>Definition</u> (Homomorphismus von Prägarben).
Seien $\mathfrak{F},\mathfrak{G}$ Prägarben auf dem topologischen Raum X. Ein <u>Homomorphismus</u> $\alpha: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$\alpha_U: \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{G}(U), \quad (U = \mathring{U} \subset X),$$

die mit den Restriktionen verträglich ist, d.h. für $V = \mathring{V} \subset U$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathfrak{G}(U) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho^U_V} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^U_V} \\ \mathfrak{F}(V) & \xrightarrow[\alpha_V]{} & \mathfrak{G}(V) \end{array}$$

kommutativ.

<u>Beispiele.</u> (i) Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit den Garben $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}^*$. Für $f \in \mathcal{O}(U)$ sei $\alpha_U(f) := e^{2\pi i f}$. Dann ist $\alpha = (\alpha_U)_{U=\mathring{U}\subset X}$ ein Homomorphismus $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$.
(ii) Sei $X = \mathring{X} \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{E}^{(q)}$ die Garbe der differenzierbaren Differentialformen vom Grad q. Die Ableitung $d: \mathcal{E}^{(q)} \longrightarrow \mathcal{E}^{(q+1)}$ ist ebenfalls ein Homomorphismus.
(iii) Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann sind die kanonischen Einbettungen $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}$, bzw. $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}$ Homomorphismen.
Sei $\alpha: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ ein Garbenhomomorphismus über X und $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann induziert α einen mit δ verträglichen Homomorphismus

$$\tilde{\alpha}_q: C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G}).$$

Daher gilt: $\tilde{\alpha}_q(Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})) \subset Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$
$\tilde{\alpha}_q(B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})) \subset B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$