Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

6. Komplexe Mannigfaltigkeiten

$f|G\setminus K'$ läßt sich fortsetzen zu einem Element $g \in \mathcal{E}(G)$. Da

$$d''g = d''f = 0 \text{ auf } G\setminus K',$$

folgt $d''g \in \mathcal{E}^{0,1}(\mathbb{C}^n)$, indem man $d''g$ durch Null auf $\mathbb{C}^n\setminus G$ fortsetzt. Nach Satz 3 existiert ein $\beta \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ mit kompakten Träger P und

$$d''\beta = d''g.$$

Daher ist

$$F := g - \beta$$

holomorph in G und

$$F|(G\setminus K) = f,$$

<u>Beweis.</u> Die Funktion β ist holomorph in $\mathbb{C}^n\setminus K'$.
Da $\beta = 0$ auf $\mathbb{C}^n\setminus P$, gibt es wegen des Identitätssatzes einen Punkt $p \in G\setminus K'$ mit einer offenen Umgebung $U \subset G\setminus K'$, so daß $\beta|U = 0$.
Daraus folgt

$$F|U = g|U = f|U.$$

Da $G\setminus K$ zusammenhängt, folgt wiederum nach dem Identitätssatz:
$F = f$ auf $G\setminus K$.

<u>§ 6. Komplexe Mannigfaltigkeiten</u>

<u>Definition.</u> Es sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{T}$ das System der offenen Mengen in X. Eine <u>Prägarbe</u> von Gruppen auf X ist ein Paar $(\mathfrak{F},\rho)$, bestehend aus

i) einer Familie $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}(U))_{U\in\mathfrak{T}}$ von Gruppen mit $\mathfrak{F}(\emptyset) = 0$,
ii) einer Familie $\rho = (\rho^U_V)_{U,V\in\mathfrak{T},V\subset U}$ von "<u>Beschränkungs"-Homomorphismen</u> $\rho^U_V: \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(V)$ mit

$$\rho^U_U = id_{\mathfrak{F}(U)},\ \rho^U_W = \rho^V_W\circ\rho^U_V \text{ für } W \subset V \subset U \text{ aus } \mathfrak{T}.$$

Man schreibt meist $\mathfrak{F}$ statt $(\mathfrak{F},\rho)$.
Analog sind Prägarben von Ringen, Vektorräumen, Algebren ... definiert.

<u>Definition.</u> Eine Prägarbe $(\mathfrak{F},\rho)$ auf X heißt <u>Garbe</u>, wenn folgende Axiome erfüllt sind:
Seien $U_i \in \mathfrak{T}$, $(i \in I)$, und $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann gilt

(I) Sind $f,g \in \mathfrak{F}(U)$ mit $\rho^U_{U_i}(f) = \rho^U_{U_i}(g)$, $i \in I$, so folgt $f = g$

(II) Sind $f_i \in \mathfrak{F}(U_i)(i \in I)$ mit $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$ für alle $i,j \in I$, dann existiert ein $f \in \mathfrak{F}(U)$ mit $\rho^U_{U_i}(f) = f_i$ $(i \in I)$.

<u>Bemerkung.</u> Wegen (I) ist dieses f eindeutig bestimmt.

<u>Beispiele.</u>
a) Sei X ein topologischer Raum
$\mathcal{C}$, die Garbe der stetigen (komplexwertigen) Funktionen ist eine Garbe von Ringen mit $\mathcal{C}(U)$ = Ring der stetigen Funktionen $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ und den gewöhnlichen Beschränkungsabbildung $\rho^U_V: \mathcal{C}(U) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$.
b) Sei wieder X ein topologischer Raum, $\mathcal{B}(U)$ = Ring der beschränkten stetigen Funktionen $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$. Die so erhaltene Prägarbe $\mathcal{B}$ von Ringen erfüllt i.a. nicht Garbenaxiom II.

c) Auf $X = \overset{\circ}{X} \subset \mathbb{C}^n$ sind

$\mathcal{O}, \mathfrak{m}, \mathcal{E}$ Garben von Ringen,

$\mathcal{O}^*, \mathfrak{m}^*$ Garben von Gruppen (mit Multiplikation als Gruppenoperation),

$\mathcal{E}^{p,q}$ eine Garbe von Vektorräumen.

d) Sei X ein topologischer Raum, G eine Gruppe

$G(U) :=$ Gruppe der lokal-konstanten Abbildungen $U \longrightarrow G$

(falls U zusammenhängend, gilt $G(U) \cong G$).

Die so gewonnene Garbe wird wieder mit G bezeichnet.

e) Durch $G(U) := G$, $G(\emptyset) = 0$, $r_V^U = \mathrm{id}_G$, falls U,V nichtleer, ist die "Konstante Prägarbe" gegeben. Hat X zwei disjunkte, nichtleere offene Mengen U_1, U_2 und G zwei verschiedene Elemente g_1, g_2, dann ist diese Prägarbe keine Garbe.

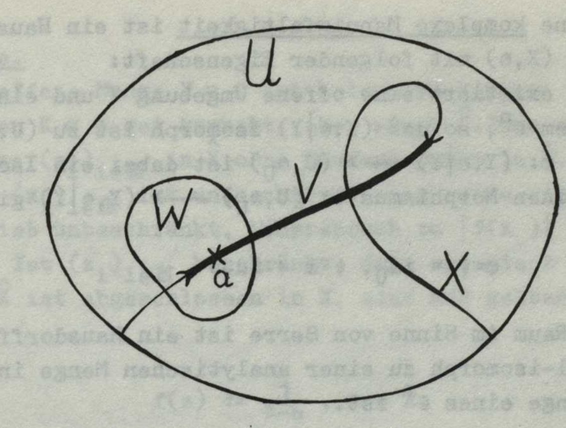
<u>Definition.</u> Ein <u>geringter Raum</u> ist ein Paar $(X, \mathcal{A})$, bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Unterringgarbe $\mathcal{A}$ von $\mathcal{C}$.
Eine Garbe $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \rho)$ heißt dabei Unterringgarbe, falls $\mathcal{A}(U)$ Unterring von $\mathcal{C}(U)$ ist und $\rho_V^U\colon \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(V)$ die gewöhnliche Beschränkungsabbildung.
Eine allgemeinere Definition findet man z.B. bei Grothendieck [12].

<u>Bemerkung.</u> Ein offener Teilraum eines geringten Raumes ist in natürlicher Weise wieder ein geringter Raum.

<u>Beispiele.</u>
a) $(X, \mathcal{C})$ ist geringter Raum für jeden topologischen Raum, ebenso
b) $(X, \mathcal{O})$, wobei $X = \overset{\circ}{X} \subset \mathbb{C}^n$.
c) Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$ und $X \subset U$ eine analytische Menge.
Definition der <u>Garbe $\mathcal{O}_X$ der holomorphen Funktionen auf X:</u>
Sei $V \subset X$ offen (bzgl. Relativtopologie).
$f \in \mathcal{C}(V)$ gehöre zu $\mathcal{O}_X(V)$ genau dann, wenn es zu jedem $a \in V$ eine offene Umgebung $W \subset U$ und ein $F \in \mathcal{O}(W)$ gibt mit

$$f|W \cap V = F|W \cap V.$$

$(X, \mathcal{O}_X)$ ist dann ein geringter Raum.



<u>Definition.</u> Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ geringte Räume. Ein <u>Morphismus</u>

$$\varphi\colon (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$$

ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \longrightarrow Y$, so daß für jede offene Menge $V \subset Y$ und jedes $g \in \mathcal{B}(V)$ gilt

$$g \circ \varphi \in \mathcal{A}(\varphi^{-1}(V)).$$

<u>Bemerkung.</u>
Seien $X = \overset{\circ}{X} \subset \mathbb{C}^n$, $Y = \overset{\circ}{Y} \subset \mathbb{C}^m$. Eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann holomorph, wenn der Rücktransport jeder holomorphen Funktion holomorph ist.
(i) Ist $f \in \mathcal{O}(Y)$, dann folgt sofort $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$
(ii) Die kanonischen Koordinatenfunktionen $w_1, \ldots, w_m$ in $\mathbb{C}^m$ sind holomorph, also folgt $f_\mu := w_\mu \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$ $\mu = 1, \ldots, m$.
Sei $\varphi(a) = (b_1, \ldots, b_m)$. Dann gilt $b_\mu = (w_\mu \circ \varphi)(a) = f_\mu(a)$, also $\varphi(a) = (f_1(a), \ldots, f_m(a))$ für alle $a \in X$, d.h. $\varphi \in \mathcal{O}(X)$.

<u>Folgerung.</u> Die Morphismen $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ sind genau die holomorphen Abbildungen.

Definition. Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorff-geringter Raum $(X,\mathcal{O})$ mit folgender Eigenschaft:
Zu jedem $a \in X$ existiert eine offene Umgebung Y und eine offene Menge U in einem $\mathbb{C}^n$, so daß $(Y,\mathcal{O}|Y)$ isomorph ist zu $(U,\mathcal{O}_U)$.
Ein Morphismus $\varphi: (Y,\mathcal{O}|Y) \longrightarrow (U,\mathcal{O}_U)$ ist dabei ein Isomorphismus, wenn es einen Morphismus $\psi: (U,\mathcal{O}_U) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}|Y)$ gibt mit

$$\varphi\circ\psi = id_U, \; \psi\circ\varphi = id_Y.$$

Ein komplexer Raum im Sinne von Serre ist ein Hausdorff-geringter Raum, der lokal-isomorph zu einer analytischen Menge in einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{C}^n$ ist.

Beispiele.
Jede offene Menge im $\mathbb{C}^n$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit. Jede Riemannsche Fläche ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition. Eine komplexe Mannigfaltigkeit $(X,\mathcal{O})$ mit abzählbarer Topologie heißt Steinsch (oder holomorph-vollständig), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) X ist holomorph-konvex, d.h. für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ ist die Menge $\hat{K} := \bigcap_{f\in\mathcal{O}(X)} \{x \in X: |f(x)| \leq \sup|f(K)|\}$ kompakt.

(ii) X ist holomorph-separabel, d.h. zu je zwei Punkten $x,y \in X$, $x \neq y$, existiert eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $f(x) \neq f(y)$.

(iii) X besitzt lokale Koordinaten durch globale Funktionen, d.h. zu jedem $a \in X$ gibt es holomorphe Funktionen $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{O}(X)$, eine offene Umgebung U von a und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}^n$, so daß $(f_1,\ldots,f_n): U \longrightarrow V$ biholomorph ist (d.h. ein Isomorphismus geringter Räume).

Bemerkungen. 1) Nach Grauert [9] folgt (iii) aus den ersten beiden Bedingungen. Zur Begriffsbildung vergleiche Stein [29].
2) Für offene Mengen $X \subset \mathbb{C}^n$ sind die Bedingungen (ii) und (iii) stets erfüllt, außerdem besitzt X abzählbare Topologie.

Beispiele.
1) Jede offene Menge $X \subset \mathbb{C}$ ist holomorph-konvex:
Angenommen $K \subset X$ sei kompakt, aber nicht $\hat{K}$. Dann existiert eine Punktfolge $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\hat{K}$ ohne Häufungspunkt in $\hat{K}$.
1. Fall: $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, man setze $f(z) := z$, $f \in \mathcal{O}(X)$. $|f(z_i)|$ ist unbeschränkt, Widerspruch zu $|f(z_i)| \leq \sup|f(K)| < \infty$.
2. Fall: Ist $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beschränkt, dann existiert ein Häufungspunkt $a \in \partial X$ ($\hat{K}$ ist abgeschlossen in X, also muß gelten $a \notin X$).
Sei

$$f(z) := \frac{1}{z-a}, \; z \in X.$$

Es ist $f \in \mathcal{O}(X)$, $|f(z_i)|$ ist unbeschränkt, aber $|f(z_i)| \leq \sup|f(K)| < \infty$.

2) Sei

$$K = \{z \in \mathbb{C}: 1 \leq |z| \leq 2\}.$$

Für $X = \mathbb{C}$ erhält man

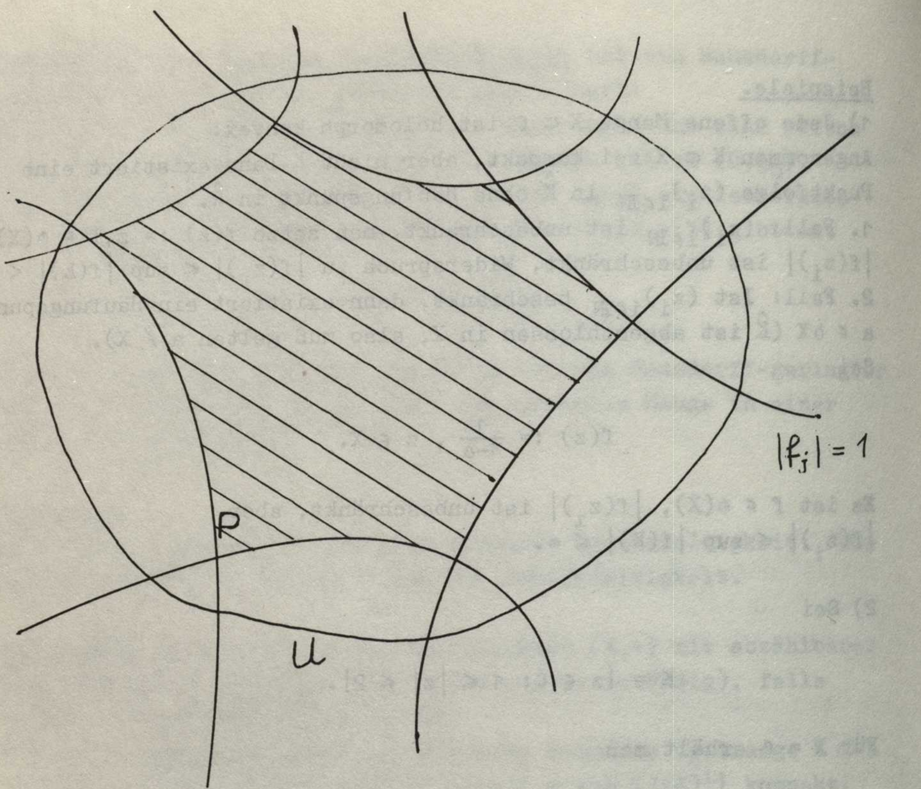
$$\hat{K} = \hat{K}_X = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 2\},$$

bzgl. $X_1 = \mathbb{C}^*$ folgt aber

$$\hat{K}_{X_1} = K.$$

Definition. Sei X ein komplexe Mannigfaltigkeit. Eine offene Teilmenge $P \subset X$ heißt analytisches Polyeder (Oka-Weil-Gebiet), wenn $\overline{P}$ kompakt ist und endlich viele holomorphe Funktionen $f_1,\ldots,f_k \in \mathcal{O}(X)$ und eine offene Umgebung U von $\overline{P}$ existieren, so daß

$$P = \bigcap_{j=1}^{k} \{x \in U: |f_j(x)| < 1\}.$$



<u>Beispiele.</u>

a) Jeder relativ kompakte offene Polyzylinder P ist ein analytisches Polyeder im $\mathbb{C}^n$.

<u>Beweis.</u> Es gilt

$$P = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < r_\nu;\ \nu = 1,\dots,n\},\ 0<r_\nu<\infty.$$

Setze $f_j := \frac{z_j}{r_j}$ für $\nu = 1,\dots,n$, dann gilt:

$$P = \bigcap_{j=1}^{n} \{z \in \mathbb{C}^n : |f_j| < 1\}.$$

b) $P := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ ist analytisches Polyeder bezüglich $\mathbb{C}^*$, denn es gilt:

$$P = \{z \in \mathbb{C}^* : \left|\tfrac{z}{2}\right| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C}^* : \left|\tfrac{1}{z}\right| < 1\}$$

P ist kein analytisches Polyeder bezüglich $\mathbb{C}$ nach dem Maximumprinzip.

<u>Satz 1.</u> Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge mit $\hat{K} = K$ und U eine offene Umgebung von K. Dann existiert ein analytisches Polyeder P mit

$$K \subset P \subset \bar{P} \subset U.$$

<u>Beweis.</u> Da X lokalkompakt ist, sei U o.B.d.A. als relativ kompakt vorausgesetzt. Es gilt:

$$\partial U \cap K = \emptyset.$$

Da nach Voraussetzung $K = \hat{K}$ ist, gibt es zu jedem $x \in \partial U$ eine Funktion $f_x \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$|f_x(x)| > \sup |f_x(K)|.$$

o.B.d.A. seien $|f_x(x)| > 1$, $\sup |f_x(K)| < 1$.
Zu jedem $x \in \partial U$ existiert eine Umgebung V_x, so daß

$$|f_x(y)| > 1 \text{ für } y \in V_x.$$

Da ∂U relativ kompakt ist, genügen endlich viele $V_{x_1},\dots,V_{x_k}$, um ∂U zu überdecken.

$$f_j := f_{x_j}\quad,\ j = 1,\dots,k$$
$$P := \{x \in U : |f_j(x)| < 1 \text{ für } j = 1,\dots,k\}$$

Dann gilt:

i) $P \supset K$, da $\sup |f_j(K)| < 1$ für alle j.

ii) $\overline{P} = \{x \in \overline{U}: |f_j(x)| \leq 1$ für $j = 1,\dots,k\}$ ist kompakt, da $\overline{U}$ kompakt.

iii) $\overline{P} = \{x \in U: |f_j(x)| \leq 1$ für $j = 1,\dots,k\}$, da

$$\bigcap_{j=1}^{k} \{x \in \partial U: |f_j(x)| \leq 1\} = \emptyset$$

nach Wahl der f_j.

Also gilt: $\overline{P} \subset U$ und P ist ein analytisches Polyeder.

<u>Corollar.</u> Sei X eine holomorph-konvexe komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. (Dies ist z.B. der Fall, wenn X Steinsch ist). Dann existiert eine Folge $P_0, P_1, P_2, \dots$ analytischer Polyeder mit

$$\overline{P_i} \subset P_{i+1} \text{ und } \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i = X.$$

<u>Beweis.</u> X hat abzählbare Topologie und ist lokalkompakt. Daraus folgt: Es gibt kompakte Teilmengen $K_i, i \in \mathbb{N}$ von X mit

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \text{ und } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X.$$

$\hat{K}_0$ ist kompakt ⇒ Es existiert ein analytisches Polyeder $P_0 \supset \hat{K}_0$

$\widehat{K_1 \cup \overline{P}_0}$ ist kompakt ⇒ Es existiert ein analytisches Polyeder

$$P_1 \supset \widehat{K_1 \cup \overline{P}_0}\,.$$

So läßt sich induktiv eine Folge $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ analytischer Polyeder konstruieren. Da

$$P_i \supset \hat{K}_i \supset K_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

gilt, ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} P_i = X$.

<u>Satz 2</u> (Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{C}^n$).

Sei $U = \mathring{U} \subset \mathbb{C}^n$, $0 < k \leq n$ und $A \subset U$ abgeschlossen (bezüglich der Relativtopologie in U). Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

i) Zu jedem $a \in A$ existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ und $f_1, \dots, f_{n-k} \in \mathcal{O}(V)$ mit

$$A \cap V = \{z \in V: f_1(z) = \dots = f_{n-k}(z) = 0\}$$

und $\text{Rang}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right)(z) = n - k$ für alle $z \in A \cap V$.

ii) Zu jedem $a \in A$ existiert eine offene Umgebung $V \subset U$, eine offene Menge $T \subset \mathbb{C}^k$ und Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}(T)$, so daß

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): T \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

T bijektiv auf $A \cap V$ abbildet und

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_\kappa}\right)(t) = k \text{ für alle } t \in T.$$

(d.h. Es gibt lokal eine Parameterdarstellung von A).

iii) Zu jedem $a \in A$ existiert eine offene Umgebung $V \subset U$, eine offene Umgebung W des Nullpunkts in $\mathbb{C}^n$ und eine biholomorphe Abbildung $\phi: V \longrightarrow W$ mit

$$\phi(A \cap V) = E_k \cap W,$$

wobei $E_k := \{z \in \mathbb{C}^n: z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$,

(d.h. A sieht lokal so aus wie ein Ebenenstück E_k im $\mathbb{C}^n$).

(Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zum reellen Fall).

<u>Definition.</u> Bezeichnungen wie in Satz 2. A heißt <u>analytische Untermannigfaltigkeit von U</u>, falls für A eine der Aussagen i), ii), iii) gilt.

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ heißt lokal-analytische Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$, falls es eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ gibt, so daß A analytische Untermannigfaltigkeit von U ist.

Folgerung. Eine analytische Untermannigfaltigkeit einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{C}^n$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Beweis. Sei A eine analytische Untermannigfaltigkeit einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$. Dann ist A insbesondere eine analytische Teilmenge von U. Dann ist $(A,\mathcal{O}_A)$ ein geringter Raum (vgl. Beispiel c) zu der Definition des geringten Raums). Da A Hausdorffsch ist, genügt es zu zeigen: Zu jedem Punkt $a \in A$ existiert eine offene Umgebung U' und eine offene Menge U" in einem $\mathbb{C}^k$, so daß

$$(U',\mathcal{O}(U')) \cong (U'',\mathcal{O}(U'')).$$

Beweis. Zu $a \in A$ existiert eine offene Umgebung $V \subset U$, so daß gilt: Es gibt eine offene Umgebung W des Nullpunkts in $\mathbb{C}^n$ und eine biholomorphe Abbildung $\phi: V \longrightarrow W$ mit

$$\phi(A \cap V) = E_k \cap W, \quad \text{(o.B.d.A. W ein Polyzylinder)}.$$

Daraus folgt:
i) $A \cap V$ ist homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{C}^k$.
ii) $\mathcal{O}(A\cap V) \cong \mathcal{O}(E_k \cap W)$

Beweis zu ii).

$$\text{Sei} \quad \psi: \mathcal{O}(A\cap V) \longrightarrow \mathcal{C}(E_k\cap W)$$
$$f \longmapsto f\circ(\phi^{-1}|E_k\cap W)$$

für $f \in \mathcal{O}(A\cap V)$ ist dann $\psi(f)$ sogar in $\mathcal{O}(E_k\cap W)$, da jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(A)$ die Beschränkung einer holomorphen Funktion $F \in \mathcal{O}(X)$ ist, wobei X eine offene Umgebung von a im $\mathbb{C}^n$ ist.

$$\text{Sei} \quad \psi': \mathcal{O}(E_k\cap W) \longrightarrow \mathcal{C}(A\cap V)$$
$$g \longmapsto g\circ(\phi|A\cap V)$$

Es gilt:

$$g \in \mathcal{O}(E_k\cap W) \Rightarrow \psi'(g) \in \mathcal{O}(A\cap V).$$

Sei $g \in \mathcal{O}(E_k\cap W)$. Setze für $z \in (E_k\cap W) \times \mathbb{C}^{n-k} =: \Omega$

$$G(z) := g(z_1,\ldots,z_k)$$

Dann ist G holomorph in der offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{C}^n$. Die Menge $\Omega' := \phi^{-1}(\Omega\cap W)$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ mit $\Omega' \supset V\cap A$. Dann ist $G\circ\phi: \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und da

$$G\circ\phi|A\cap V = g\circ(\phi|A\cap V),$$

gilt

$$\psi'(g) = g\circ(\phi|A\cap V) \in \mathcal{O}(A\cap V).$$

Da $\psi\psi' = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}(E_k\cap W)}$ und $\psi'\psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}(A\cap V)}$, folgt

$$\mathcal{O}(E_k\cap W) \cong \mathcal{O}(A\cap V).$$

Satz 3. Sei P ein analytisches Polyeder in einer Steinschen Mannigfaltigkeit X. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, eine analytische Untermannigfaltigkeit A des Einheitspolyzylinders im $\mathbb{C}^n$ und eine biholomorphe Abbildung $\phi: P \longrightarrow A$.

Beweis. $U = \mathring{U} \subset X$,

$$P = \{x \in U: |f_j(x)| < 1 \text{ für } j = 1,\ldots,k\},$$

wobei $f_j \in \mathcal{O}(X)$.

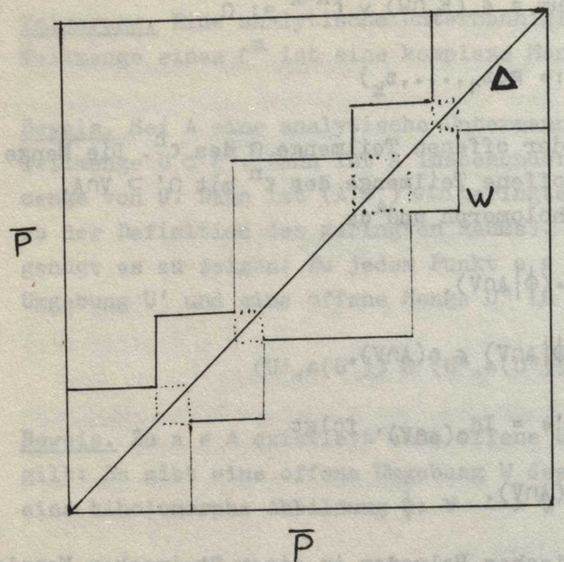
a) Es existieren endlich viele Funktionen $g_1,\ldots,g_l \in \mathcal{O}(X)$, so daß für jedes $a \in \overline{P}$ einige dieser Funktionen lokale Koordinaten in einer Umgebung von a definieren (nach Axiom (iii) für Steinsche Mannigfaltigkeiten und weil $\overline{P}$ kompakt ist).

o.B.d.A. $\sup |g_\lambda(\overline{P})| < 1$ für $\lambda = 1,\ldots,l$

b) Es existieren endlich viele Funktionen $h_1,\ldots,h_m \in \mathcal{O}(X)$, so daß $g_1,\ldots,g_l,h_1,\ldots,h_m$ die Punkte von $\overline{P}$ trennen, d.h.

$$(g_1,\ldots,g_l,h_1,\ldots,h_m): \overline{P} \longrightarrow \mathbb{C}^{l+m}$$

ist injektiv:



$\Lambda := \{(x,y) \in \overline{P}\times\overline{P}\colon x = y\}$
Es gibt eine offene Umgebung W von Λ in $\overline{P}\times\overline{P}$, so daß die $g_1,\ldots,g_l$, alle Punktepaare $(x,y) \in W$ trennen nach a).
Zu jedem $(x,y) \in \overline{P}\times\overline{P}\setminus W$ existiert $h_{x,y} \in \mathcal{O}(X)$ mit $h_{x,y}(x) \neq h_{x,y}(y)$, da X holomorph separabel ist. Da $\overline{P}\times\overline{P}\setminus W$ kompakt ist, genügen endlich viele $h_{x_1,y_1},\ldots,h_{x_m,y_m} \in \mathcal{O}(X)$, um alle Punktepaare $(x,y) \in \overline{P}\times\overline{P}\setminus W$ zu trennen.

$$\text{Sei} \quad h_i := h_{x_i,y_i} \quad \text{für } i = 1,\ldots,m$$

Also trennten $g_1,\ldots,g_l,h_1,\ldots,h_m$ alle Punkte von $\overline{P}$.
o.B.d.A. gelte $\sup |h_\lambda(\overline{P})| < 1$ für $\lambda = 1,\ldots,m$.

<u>Behauptung.</u> $\phi\colon P \longrightarrow E$, definiert durch

$$\phi := (f_1,\ldots,f_k,g_1,\ldots,g_l,h_1,\ldots,h_m)$$

bildet P biholomorph auf eine analytische Untermannigfaltigkeit $A \subset E$ ab, wobei

$$E = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_\nu| < 1 \text{ für } \nu = 1,\ldots,n\}.$$

Hierbei ist $n = k+l+m$.

<u>Beweis.</u> i) ϕ ist injektiv nach b)
ii) ϕ ist eigentlich (d.h. das Urbild jeder kompakten Menge ist kompakt).
Sei $K \subset E$ kompakt. Dann existiert ein r, $0<r<1$, so daß

$$K \subset \tilde{E}_r =\colon \{z \in E\colon |z_\nu| \leq r \text{ für } \nu = 1,\ldots,k\}$$

Es gilt $\phi^{-1}(K) \subset \phi^{-1}(\tilde{E}_r)$. Wenn $\phi^{-1}(\tilde{E}_r)$ als kompakt nachgewiesen ist, folgt $\phi^{-1}(K)$ kompakt, da X Hausdorffsch ist.

$$\phi^{-1}(\tilde{E}_r) \subset \{x \in P\colon |f_i(x)| \leq r \text{ für } i = 1,\ldots,k\} =$$
$$= \{x \in \overline{P}\colon |f_i(x)| \leq r \text{ für } i = 1,\ldots,k\} ,$$

da für alle $x \in \overline{P}\setminus P$ gilt: Es gibt j, $1\leq j\leq k$, mit $|f_j(x)| = 1$.
Also ist $\phi^{-1}(\tilde{E}_r)$ kompakt, da $\overline{P}$ kompakt ist und X Hausdorffsch.
Da X und $\mathbb{C}^n$ lokalkompakt sind, folgt: ϕ ist abgeschlossen.
Sei $A := \phi(P)$ versehen mit der Relativtopologie. Dann ist A in E abgeschlossen, $\phi\colon P \longrightarrow A$ ein Homöomorphismus.
iii) A ist analytische Untermannigfaltigkeit und

$$\phi\colon P \longrightarrow A$$

ist biholomorph. Dies folgt aus nachstehendem Hilfssatz, da die Eigenschaft einer Abbildung holomorph zu sein, lokal ist und es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene zusammenhängende Umgebung W und Funktionen

$$w_1,\ldots,w_n \in \{g_1,\ldots,g_l,h_1,\ldots,h_m\}$$

gibt, so daß

$$(w_1,\ldots,w_n)\colon P \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine biholomorphe Abbildung auf das (offene) Bild von P unter $(w_1,\dots,w_n)$ ist.

<u>Hilfssatz.</u> Sei Y eine komplexe Mannigfaltigkeit und

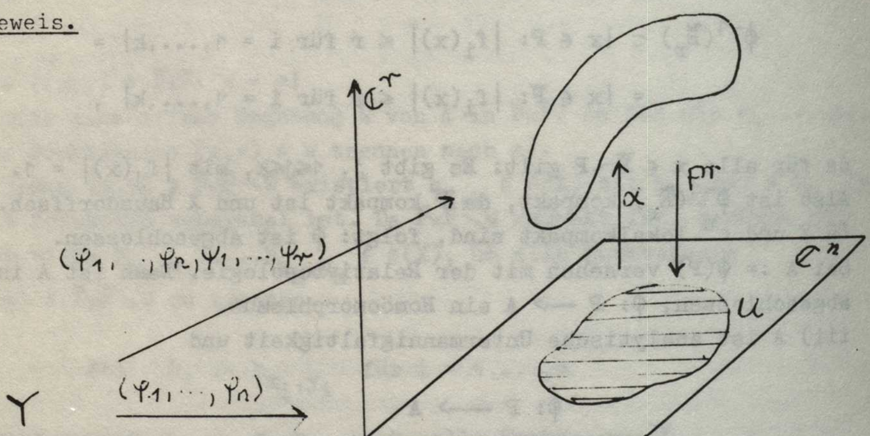
$$(\varphi_1,\dots,\varphi_n) : Y \longrightarrow U$$

biholomorph, wobei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$ ist. Dann gilt für beliebige holomorphe Funktionen $\psi_1,\dots,\psi_r \in \mathcal{O}(Y)$

$$\phi := (\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi_1,\dots,\psi_r) : Y \longrightarrow \mathbb{C}^{n+r}$$

bildet Y biholomorph auf eine lokal analytische Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^{n+r}$, genauer eine analytische Untermannigfaltigkeit von $U \times \mathbb{C}^r$, ab.

<u>Beweis.</u>



Sei $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{C}^{n+r}$.

$$\alpha(z) = (\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi_1,\dots,\psi_r)\circ(\varphi_1,\dots,\varphi_n)^{-1}(z)$$

Dann ist α holomorph in U.

$$\alpha(z_1,\dots,z_n) = (z_1,\dots,z_n,\alpha_{n+1}(z),\dots,\alpha_{n+r}(z)).$$

Es gilt $$\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial z_\nu}\right)_{\substack{i=1,\dots,n+r\\ \nu=1,\dots,n}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{rg}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial z_\nu}\right)(z) = n$ für alle $z \in U$

$\Rightarrow \phi(Y)$ ist lokal analytische Untermannigfaltigkeit nach Satz 2 ii)

Es gilt: ϕ ist injektiv, da $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ injektiv.

Sei $A := \phi(Y)$. Dann gilt: $\phi : Y \longrightarrow A$ ist biholomorph, da ϕ holomorph ist und $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ biholomorph.