Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

4. Lösung der Cousin-Problem in Polyzylindern

§ 4. Lösung der Cousin-Probleme in Polyzylindern

Definition. Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$. Unter einer meromorphen Funktion in U versteht man eine in einer offenen dichten Teilmenge $U' \subset U$ definierte holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U')$, so daß folgendes gilt:
i) zu jedem Punkt $a \in U \setminus U'$ existiert eine offene, zusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von a und holomorphe Funktionen $g,h \in \mathcal{O}(V)$, $h \neq 0$ mit $f \cdot h = g$ in $V \cap U'$.
ii) f läßt sich in keinem Punkt $a \in U \setminus U'$ holomorph fortsetzen.
Die Punkte von $U \setminus U'$ heißen die Polstellen von f.
Die Definition der meromorphen Funktionen ist lokal. Die Aussage in i) läßt sich für Gebiete global beweisen.

Bemerkung. Die Polstellenmenge einer meromorphen Funktion ist lokal in einer analytischen Menge der Codimension 1 enthalten.

Beweis. Sei $a \in U \setminus U'$. Nach Definition existiert offene, zusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von a und $g,h \in \mathcal{O}(V)$, $h \neq 0$, mit $f \cdot h = g$ in $V \cap U'$.
Dann gilt: $V \cap (U \setminus U') \subset \{z \in V : h(z) = 0\}$.

Beweis. Sei $b \in V \cap (U \setminus U')$;
Annahme: $h(b) \neq 0 \Rightarrow h(z) \neq 0$ für alle z in einer genügend kleinen Umgebung von $b \Rightarrow f$ holomorph fortsetzbar nach b im Widerspruch zur Eigenschaft von b, eine Polstelle zu sein.

Bezeichnung. $\mathfrak{m}(U)$:= Menge aller in U meromorphen Funktionen.

Satz 1 (Identitätssatz). Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und $U \subset G$ eine nichtleere offene Teilmenge. Die Funktion $f \in \mathfrak{m}(G)$ verschwinde auf U. Dann ist $f = 0$.

Beweis. Sei P die Polstellenmenge von f. Für P gilt wegen der obigen Bemerkung der Riemannsche Hebbarkeitssatz. Daraus folgt, daß $G \setminus P$ zusammenhängt (Corollar zum 1. Riemannschen Hebbarkeitssatz).

Mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt:
$f|G \setminus P = 0 \Rightarrow P = \emptyset \Rightarrow f = 0$.

Algebraische Operationen in $\mathfrak{m}(U)$.
Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$; $f,g \in \mathfrak{m}(U)$. Sei P_1 die Polstellenmenge von f und P_2 die von g.
$f+g$, $f \cdot g$ sind zunächst definiert auf $U \setminus (P_1 \cup P_2)$, dann soweit wie möglich holomorph fortgesetzt.
Damit ist $\mathfrak{m}(U)$ ein Ring. Falls U zusammenhängt, ist $\mathfrak{m}(U)$ ein Körper (folgt aus Identitätssatz).

Bezeichnung. $\mathfrak{m}^*(U)$ = Menge der invertierbaren Elemente in $\mathfrak{m}(U)$ = = Menge der meromorphen Funktionen in U, die auf keiner Zusammenhangskomponente verschwinden.

Satz 2. Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$ und $f \in \mathfrak{m}(U)$, P die Polstellenmenge von f, $a \in P$. Dann tritt genau eine der folgenden Möglichkeiten ein:
a) Für jede Folge $z_\nu \in U \setminus P$, $\nu \in \mathbb{N}$, mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu = a$ gilt $\lim\limits_{\nu \to \infty} |f(z_\nu)| = \infty$
b) Zu jedem Wert $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existiert eine Folge $z_\nu \in U \setminus P$, $\nu \in \mathbb{N}$, mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu = a$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(z_\nu) = c$.

Die Punkte der ersten Art nennt man Polstellen im engeren Sinn, die der zweiten Art heißen Unbestimmtheitsstellen.

Beispiel.
Im $\mathbb{C}^2$ seien z_1, z_2 die Koordinatenfunktionen und $f = \frac{z_1}{z_2}$. Polstellen

im engeren Sinn: $\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \neq 0,\ z_2 = 0\}$
Unbestimmtheitsstelle $(0,0)$
Sei $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
i) $c = \infty$: Dann gilt für die Folge $\left(\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)\right)_{k \geq 1}$: $\lim\limits_{k \to \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \infty$.
ii) $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt für die Folge $\left(\left(c \cdot \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right)_{k \geq 1}$: $\lim\limits_{k \to \infty} f\left(c \cdot \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = c$.

Beweis des Satzes. Es existiert stets eine Punktfolge $z_\nu \longrightarrow a$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = \infty$, da andernfalls die Funktion f in einer Umgebung von a in $U \setminus P$ beschränkt wäre und nach der Bemerkung zum 1. Riemannschen Hebbarkeitssatz nach a holomorph fortsetzbar wäre im Widerspruch zur Eigenschaft von a, ein Element von P zu sein.

Annahme: Fall b) liegt nicht vor. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so daß für keine Folge $z_\nu \longrightarrow a$ gilt: $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = c$.

Daraus folgt: $\frac{1}{f-c}$ ist beschränkt in einer Umgebung von a. Nach dem 1. Riemannschen Hebbarkeitssatz (Verallg.) ist

$$\frac{1}{f-c} = g,$$

wobei g holomorph in einer Umgebung von a ist.

$$f = c + \frac{1}{g}$$

Es gilt:

Entweder $g(a) \neq 0$. Dann ist f beschränkt in einer Umgebung von a, Widerspruch

oder: $g(a) = 0$. Dann liegt eine Polstelle von f im engeren Sinne vor, d.h. es liegt Fall a) vor.

Bemerkung. 1) Man kann zeigen, daß die Menge der Polstellen einer meromorphen Funktion eine einscodimensionale analytische Menge ist.
2) Die Menge der Unbestimmtheitsstellen ist eine 2-codimensionale analytische Menge.
Für einen Beweis von 1) siehe Gunning-Rossi [13], S 113.

Definition. Sei $X = \mathring{X} \subset \mathbb{C}^n$.

i) Eine Cousin-I-Verteilung (additive Cousin-Verteilung) auf X ist eine Familie $\mathfrak{Q} = (U_i, f_i)_{i\in I}$, wobei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X ist und $f_i \in \mathfrak{m}(U_i)$ mit

$$f_i|U_i\cap U_j - f_j|U_i\cap U_j \in \mathcal{O}(U_i\cap U_j) \text{ für alle } i,j \in I.$$

Unter einer Lösung von $\mathfrak{Q}$ versteht man eine meromorphe Funktion $f \in \mathfrak{m}(X)$ mit

$$f|U_i - f_i \in \mathcal{O}(U_i) \text{ für alle } i \in I.$$

ii) Eine Cousin-II-Verteilung (multiplikative Verteilung) auf X ist eine Familie $\mathfrak{Q} = (U_i, f_i)_{i\in I}$, wobei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X ist unf $f_i \in \mathfrak{m}^*(X)$ mit

$$\frac{f_i|U_i\cap U_j}{f_j|U_i\cap U_j} \in \mathcal{O}^*(U_i\cap U_j) \text{ für alle } i,j \in I.$$

Unter einer Lösung von $\mathfrak{Q}$ versteht man eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{O}^*(X)$ mit

$$\frac{f|U_i}{f_i} \in \mathcal{O}^*(U_i) \text{ für alle } i \in I.$$

Vereinbarung: $\mathcal{O}(\emptyset) = \mathfrak{m}(\emptyset) = 0$. $\mathcal{O}^*(\emptyset) = \mathfrak{m}^*(\emptyset) = 1$.

Bemerkung. Die Differenz (der Quotient) zweier Lösungen einer additiven (multiplikativen) Cousin Verteilung auf X ist eine holomorphe (holomorphe und nichtverschwindende) Funktion auf X.

Bemerkung (Zusammenhang mit einer Veränderlichen).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener Zahlen ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Seien Hauptteile h_ν wie folgt gegeben:

$$h_\nu = \sum_{\mu=-k_\nu}^{-1} \frac{b_{\mu\nu}}{(z-a_\nu)^\mu}$$

Dies läßt sich als Cousin-I-Verteilung auf $\mathbb{C}$ auffassen:

$$U_\nu := \mathbb{C} \setminus \{a_\mu : \mu \neq \nu\}$$

Dann gilt: $(U_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von $\mathbb{C}$,

$$h_\nu \in \mathfrak{m}(U_\nu)$$

und $h_\nu|U_\nu \cap U_\mu - h_\mu|U_\nu \cap U_\mu \in \mathcal{O}(U_\nu\cap U_\mu)$ für alle $\nu,\mu \in \mathbb{N}$.

Nach dem Satz von Mittag-Leffler gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathfrak{m}(\mathbb{C})$, die genau in den Punkten a_ν Pole hat, so daß gilt: $\text{Haupt}_{a_\nu}(f) = h_\nu$. Daraus folgt: $f|U_\nu - h_\nu \in \mathcal{O}(U_\nu)$. Also ist f eine Lösung der additiven Cousin-Verteilung $\mathfrak{g} = (U_\nu, h_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$.

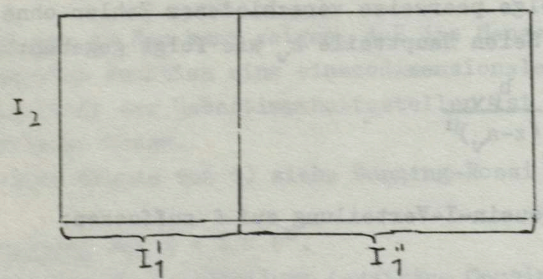
Analog läßt sich der Weierstraßsche Produktsatz als ein Satz über die Lösung eines multiplikativen Cousin-Problems auf $\mathbb{C}$ auffassen. Falls $X = \overset{\circ}{X} \subset \mathbb{C}^n$ für $n \geq 2$ sind die Cousinprobleme nicht so wie in $\mathbb{C}$ lösbar, da die Nullstellengebilde und Polstellenmengen nicht aus isolierten Punkten bestehen nach Corollar 2,3,§ 3.

<u>Cousinsches Induktionsprinzip.</u>
Sei $X = \overset{\circ}{X} \subset \mathbb{R}^N$. Sei $\mathfrak{Q}(X)$ die Menge aller achsenparalleler kompakten Quader in X. $Q = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N$, $I_\nu \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall $\nu = 1,\ldots,N$. Zwei Quader $Q', Q'' \in \mathfrak{Q}(X)$ heißen <u>heftbar</u>, falls (nach Umnumerierung der Koordinaten) folgende Situation vorliegt:

$$Q' = I_1' \times I_2 \times \ldots \times I_N, \quad Q'' = I_1'' \times I_2 \times \ldots \times I_N,$$

$$I_1' = [a,b], \quad I_1'' = [b,c]$$

N=2



<u>Satz 3.</u>
Sei $X = \overset{\circ}{X} \subset \mathbb{R}^N$ und $A: \mathfrak{Q}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ eine Abbildung. Es gelte:
i) Zu jedem Punkt $a \in X$ existiert eine offene Umgebung $U \subset X$, so daß $A(Q) = 1$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}(U)$.

ii) Sind $Q', Q'' \in \mathfrak{Q}(X)$ heftbar und $A(Q') = A(Q'') = 1$, so folgt $A(Q' \cup Q'') = 1$.
Dann gilt $A(Q) = 1$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}(X)$.
<u>Beweis.</u> Sei $Q \in \mathfrak{Q}(X)$. Q ist von der Form

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_N ,$$

wobei $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle sind für $j = 1,\ldots,N$. Wir unterteilen I_j in k Teilintervalle

$$I_{jl} = [a_j + (l-1)h_j, a_j + lh_j], \quad h_j = b_j - a_j,$$

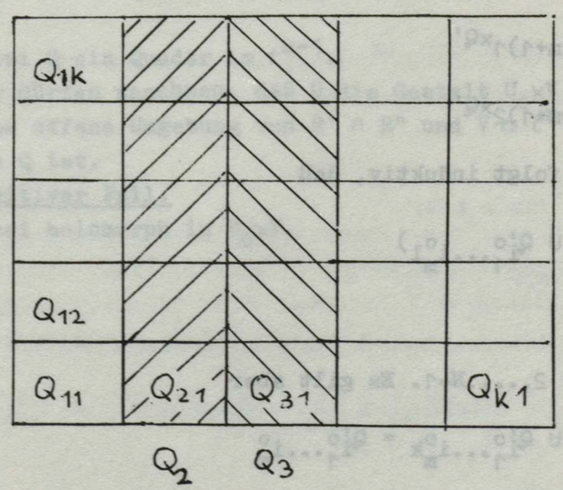
$$I_j = I_{j1} \cup \ldots \cup I_{jk} ,$$

und setzen

$$Q_{i_1 \ldots i_N} := I_{1i_1} \times \ldots \times I_{Ni_N} .$$

Falls k genügend groß ist, gilt nach dem Lebesgueschen Lemma und Voraussetzung i)

$$A(Q_{i_1 \ldots i_N}) = 1 \text{ für alle } i_1,\ldots,i_N \in \{1,\ldots,k\}.$$



Setze: $Q_{i_1\ldots i_m} := I_{1i_1}\times\ldots\times I_{mi_m}\times I_{m+1}\times\ldots\times I_N$ für m = 0,...,N.

<u>Behauptung.</u> Für alle m mit $0 \leq m \leq N$ gilt:

$$A(Q_{i_1\ldots i_m}) = 1$$

für alle $i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,k\}$.
Beweis durch absteigende Induktion nach m:
Für m = N gilt die Behauptung
Die Behauptung sei für m+1 gezeigt, m < N.
Sei ein Quader $Q_{i_1^o\ldots i_m^o}$ vorgegeben,

$$Q_{i_1^o\ldots i_m^o} = I_{1i_1^o}\times\ldots\times I_{mi_m^o}\times I_{m+1}\times\ldots\times I_N,$$

Der Quader $Q_{i_1^o\ldots i_m^o}$ und die Quader $Q_{i_1^o\ldots i_m^o i_{m+1}}$, wobei $i_{m+1} = 1,\ldots,k$ werden wie folgt umnumeriert:
Sei $Q' := I_{1i_1^o}\times\ldots\times I_{mi_m^o}\times I_{m+2}\times\ldots\times I_N$.
Dann: $Q'_{i_1^o\ldots i_m^o} := I_{m+1}\times Q'$ und

$$Q'_{i_1^o\ldots i_m^o i_{m+1}} := I_{(m+1)i_{m+1}}\times Q' \text{ mit } 1 \leq i_{m+1} \leq k.$$

Dann gilt:

$$Q'_{i_1^o\ldots i_m^o 1} = I_{(m+1)1}\times Q'$$

und

$$Q'_{i_1^o\ldots i_m^o 2} = I_{(m+1)2}\times Q'$$

sind heftbar und es folgt induktiv, daß

$$(Q'_{i_1^o\ldots i_m^o 1} \cup\ldots\cup Q'_{i_1^o\ldots i_m^o l})$$

und

$$Q'_{i_1^o\ldots i_m^o(l+1)}$$

heftbar sind für l = 2,...,N-1. Es gilt aber

$$Q'_{i_1^o\ldots i_m^o 1} \cup\ldots\cup Q'_{i_1^o\ldots i_m^o k} = Q'_{i_1^o\ldots i_m^o}$$

Nach Induktionsvoraussetzung und mit Voraussetzung ii) folgt also: $A(Q_{i_1^o\ldots i_m^o}) = 1$.
Also gilt die Behauptung insbesondere für m = 0, das heißt es gilt

$$A(Q) = A(I_1\times\ldots\times I_N) = 1.$$

<u>Satz 4</u> (Cousin-Heftung).
Seien Q',Q" heftbare kompakte Quader im $\mathbb{C}^n$ und f eine holomorphe (bzw. holomorphe und nirgends verschwindende) Funktion in einer offenen Umgebung U von $Q' \cap Q''$. Dann gibt es holomorphe (bzw. holomorphe und nirgends verschwindende) Funktionen f',f" in offenen Umgebungen von Q' bzw. Q" mit

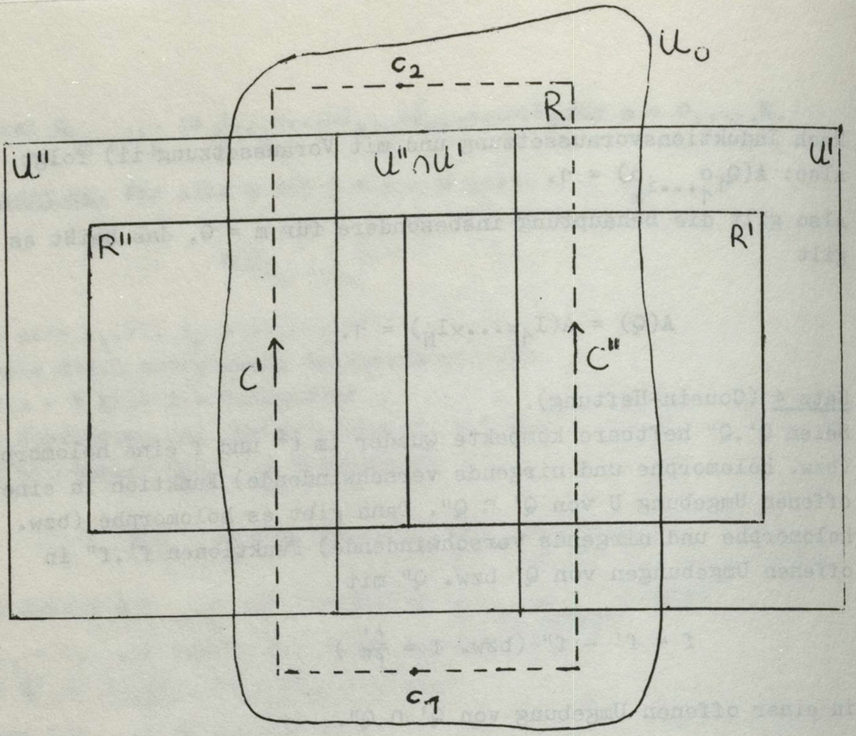
$$f = f' - f'' \quad (\text{bzw. } f = \frac{f'}{f''})$$

in einer offenen Umgebung von $Q' \cap Q''$.

<u>Beweis.</u> Nach eventueller Umnumerierung der Koordinaten und Multiplikation mit i liegt folgende Situation vor:

$$Q' = R' \times Q,\quad Q'' = R'' \times Q,$$

wobei Q ein Quader im $\mathbb{C}^{n-1}$.
Wir dürfen annehmen, daß U die Gestalt $U_o\times V$ hat, wobei $U_o \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $R' \cap R''$ und $V \subset \mathbb{C}^{n-1}$ eine offene Umgebung von Q ist.
<u>Additiver Fall.</u>
f sei holomorph in $U_o\times V$.



Da $R'' \cap R'$ kompakt und U_o offen ist, gibt es ein abgeschlossenes Rechteck $R \subset \mathbb{C}$ mit

$$R' \cap R'' \subset \overset{o}{R} \subset R \subset U_o.$$

Wir stellen den Rand von R dar als

$$\partial R = C' - C''$$

(siehe Figur).
Sei $y \in V$. Dann gilt für $z \in \overset{o}{R}$:

$$f(z,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta,y)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

nach der Cauchyschen Integralformel für eine Veränderliche.

$$f(z,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta,y)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C''} \frac{f(\zeta,y)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Sei f': $U' \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f'(z,y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta,y)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

und f'': $U'' \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f''(z,y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C''} \frac{f(\zeta,y)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Damit gilt

$$f(z,y) = f'(z,y) - f''(z,y),$$

dabei sind f' bzw. f'' holomorphe Funktionen in offenen Umgebungen U' bzw. U'' von Q' bzw. Q'', da f', f'' stetig und partiell holomorph.

Multiplikativer Fall
Sei f holomorph in einer (o.B.d.A. einfach zusammenhängenden) offenen Umgebung U von $Q' \cap Q''$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann gilt:
Zu log f existieren Funktionen $\tilde{f}', \tilde{f}''$ definiert in offenen Umgebungen von Q' bzw. Q'', so daß $\log f = \tilde{f}' - \tilde{f}''$ in einer offenen Umgebung von $Q' \cap Q''$. Dann sind

$$f' := e^{\tilde{f}'} \text{ und } f'' := e^{\tilde{f}''}$$

holomorph und nirgends verschwindend in offenen Umgebungen von Q' bzw. Q'' und es gilt über einer offenen Umgebung von $Q' \cap Q''$

$$f = \frac{f'}{f''}.$$

Satz 5. Sei X eine offene Menge im $\mathbb{C}^n$ und $\mathfrak{C} = (U_i, f_i)_{i \in I}$ eine additive (multiplikative) Cousinverteilung auf X. Sei Q_o ein kompakter Quader in X. Dann ist $\mathfrak{C}$ in einer gewissen offenen Umgebung von Q_o lösbar.

Beweis mit dem Cousinschen Induktionsprinzip.

$A(Q) = 1 :\Leftrightarrow \mathfrak{C}$ ist in einer offenen Umgebung von Q lösbar
i) Falls Q genügend klein ist, ist $\mathfrak{C}$ in Umgebung von Q lösbar, denn dann ist $Q \subset U_i$ und $f_i \in \mathfrak{m}(U_i)$ ist Lösung.
ii) Seien Q', Q'' heftbare Quader in X. Seien U' bzw. U'' offene Umgebungen von Q' bzw. Q'' und $F' \in \mathfrak{m}(U')$ und $f'' \in \mathfrak{m}(U'')$ Lösungen von $\mathfrak{C}$.

Additiver Fall: $f' - f''$ ist holomorph in einer Umgebung von $Q' \cap Q''$, da die Differenzen $f'|U_i - f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ sind.
Mit der Cousin-Heftung folgt:
$f' - f'' = g' - g''$, wobei $g' \in \mathcal{O}(V')$ und $g'' \in \mathcal{O}(V'')$, wobei V', V'' offene Umgebungen von Q' bzw. Q'' sind.

$$f' - g' = f'' - g'' \text{ in Umgebung von } Q' \cap Q''.$$

Daraus folgt: Es gibt $f \in \mathfrak{m}(V)$, V offene Umgebung von $Q' \cup Q''$ mit

$$f|V \cap V' = f' - g', \quad f|V \cap V'' = f'' - g''$$

und für f gilt: f ist Lösung von $\mathfrak{C}$ über V.
Multiplikativer Fall: analog.

Satz 6. (Mittag-Lefflersches Ausschöpfungsprinzip)
Sei $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge vollständiger metrischer Räume und seien $\rho_i : M_i \longrightarrow M_{i-1}$ für $i \geq 1$ stetige Abbildungen mit dichtem Bild. Dann gibt es eine Familie $f_i \in M_i$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\rho_i(f_i) = f_{i-1}$ für $i \geq 1$ (d.h. $\varprojlim M_i \neq \emptyset$).

Beweis. Konstruktion der f_i durch vollständige Induktion.
Sei $g_o^o \in M_o$ beliebig sowie $\varepsilon > 0$.
Da $\rho_1 : M_1 \longrightarrow M_o$ dichtes Bild hat, gibt es $g_1^1 \in M_1$ und $g_o^1 \in M_o$ mit

$$\rho_1(g_1^1) = g_o^1 \text{ und } d(g_o^1, g_o^o) < 2^{-1}\varepsilon.$$

Es gibt $g_2^2 \in M_2$, $g_1^2 \in M_1$, $g_o^2 \in M_o$ mit

$$\rho_2(g_2^2) = g_1^2, \quad \rho_1(g_1^2) = g_o^2$$

und

$$d(g_1^2, g_1^1) < 2^{-2}\varepsilon, \quad d(g_o^2, g_o^1) < 2^{-2}\varepsilon.$$

Es gibt $g_i^k \in M_i$ für $i = 0, \ldots, k$ mit

$$d(g_i^k, g_i^{k-1}) < 2^{-k}\varepsilon \text{ für } i = 0, \ldots, k-1$$

und

$$\rho_i(g_i^k) = g_{i-1}^k .$$

Setze $f_i := \lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ k \geq i}} g_i^k$, denn $(g_i^k)_{k \geq i}$ ist eine Cauchyfolge in M_i.
Da ρ_i stetig, folgt: $\rho_i(f_i) = f_{i-1}$.

Satz 7 (Cousin 1895). [7]
Seien $r_\nu \in \,]0, \infty]$ und $X := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < r_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}$.
Dann ist jedes additive oder multiplikative Cousinproblem in X lösbar.

Beweis. Es gibt eine Folge

$$X_o \subset\subset X_1 \subset\subset X_2 \subset\subset \ldots$$

von offenen Polyzylindern mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = X$, so daß $\mathfrak{C}$ über X_i lösbar ist (Satz 5 und Riemannscher Abbildungssatz).
M_i sei die Menge der Lösungen von $\mathfrak{C}$ über X_i, $\rho_i : M_{i+1} \longrightarrow M_i$ die Beschränkungsabbildung.

Additiver Fall
Sei $f_i \in M_i \Rightarrow M_i = f_i + \mathcal{O}(X_i)$ nach der Bemerkung zur Formulierung der Cousinprobleme. Daraus folgt:
Die Abbildung

$$\tau : \mathcal{O}(X_i) \longrightarrow M_i$$
$$\varphi \longmapsto f_i + \varphi$$

ist bijektiv.

$\mathcal{O}(X_i)$ ist vollständiger, translationsinvariant metrisierbarer Raum. Durch die Abbildung τ werde die Metrik auf M_i übertragen. Die so gewonnene Metrik auf M_i ist unabhängig von der Auswahl des $f_i \in M_i$:
Sei $f_i' \in M_i$ und

$$\begin{aligned} \tau' : \mathcal{O}(X_i) &\longrightarrow M_i \\ \varphi &\longmapsto f_i' + \varphi \end{aligned}$$

Seien d, d' Metriken auf M_i, gewonnen durch die Abbildungen τ, τ'; δ Metrik auf $\mathcal{O}(X_i)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \delta(f-f_i, g-f_i) = \delta(f-f_i+(f_i-f_i'), g-f_i+(f_i-f_i')) = \\ &= \delta(f-f_i', g-f_i') = d'(f,g), \end{aligned}$$

da δ translationsinvariant ist.

<u>Behauptung.</u> $\rho_i : M_{i+1} \longrightarrow M_i$ ist stetig und hat dichtes Bild.

<u>Beweis.</u> Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \varphi \arrow[d, mapsto] & \mathcal{O}(X_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(X_i) \arrow[d] & \eta \arrow[d, mapsto] \\ \varphi + f_{i+1} & M_{i+1} \arrow[r, "\rho_i"] & M_i & \eta + f_{i+1}|X_i \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.
Die Beschränkungsabbildung $\mathcal{O}(X_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{O}(X_i)$ ist stetig und hat dichtes Bild, da alle Abschnitte von Taylorentwicklungen für Funktionen aus $\mathcal{O}(X_i)$ in $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ also insbesondere in $\mathcal{O}(X_{i+1})$ liegen.
Daraus folgt die Behauptung.

Nach dem Mittag-Lefflerschen Ausschöpfungsprinzip folgt:
Es existieren $f_i \in M_i$ mit $\rho_i(f_{i+1}) = f_i$.
Daraus folgt: Es existiert eine meromorphe Funktion $f \in \mathfrak{m}(X)$ mit $f|X_i = f_i$.
f ist Lösung von $\mathfrak{C}$ auf X.

<u>Multiplikativer Fall</u>
Sei $f_i \in M_i$ und $\psi_i : \mathcal{O}(X_i) \longrightarrow M_i$ definiert durch $\varphi \longmapsto f_i e^{\varphi}$.
Dann ist ψ_i surjektiv.
Es gibt stetige Abbildung $\sigma_i : \mathcal{O}(X_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{O}(X_i)$ mit dichtem Bild, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(X_{i+1}) \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\psi_{i+1}"'] & \mathcal{O}(X_i) \arrow[d, "\psi_i"] \\ M_{i+1} \arrow[r, "\rho_i"] & M_i \end{tikzcd}$$

kommutativ ist:
$\sigma_i(\varphi) := \varphi|X_i + h$, wobei $h \in \mathcal{O}(X_i)$, so gewählt ist, daß

$$e^h = \frac{f_{i+1}}{f_i} \text{ über } X_i.$$

Dies ist möglich, da X_i einfach zusammenhängend.
Nach dem Mittag-Lefflerschen Ausschöpfungsprinzip, angewandt auf $(\mathcal{O}(X_i), \sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$, folgt: Es existiert eine Folge

$$g_i \in \mathcal{O}(X_i) \text{ für } i \in \mathbb{N}, \text{ mit } \sigma_i(g_{i+1}) = g_i.$$

Es folgt

$$f_{i+1} e^{g_{i+1}|X_i} = f_i e^{g_i}$$

$\Rightarrow$ Es existiert $f \in \mathfrak{m}^*(X)$ mit $f|X_i = f_i e^{g_i}$ und f ist Lösung von $\mathfrak{C}$ auf X.