Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

3. Die Riemannschen Hebbarkeitssätze

§ 3. Die Riemannschen Hebbarkeitssätze

Definition. Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$. Eine Teilmenge $A \subset U$ heißt *analytisch*, falls gilt

i) A ist abgeschlossen in U.
ii) Zu jedem Punkt $a \in A$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ und holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(V)$, so daß

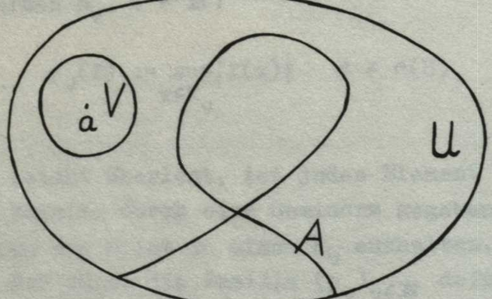
$$A \cap V = \{z \in V:\ f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

Bemerkungen. 1. Die Bedingungen i) und ii) sind äquivalent zu

ii') Zu jedem Punkt $a \in U$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ und holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(V)$, so daß

$$A \cap V = \{z \in V:\ f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

Beweis. a) Aus i) und ii) folgt ii').
Sei $a \in U \setminus A$.



Wegen i) existiert eine Umgebung $V \subset U \setminus A$ von a. Sei f die

konstante Funktion 1 auf V. Dann gilt: $f \in \mathcal{O}(V)$ und

$$A \cap V = \emptyset = \{z \in V:\ f(z) = 0\}.$$

b) Aus ii') folgt i) und ii).
Noch zu zeigen: A ist abgeschlossen. Dazu genügt es zu zeigen, daß jeder Punkt $a \in U$ eine Umgebung V besitzt, so daß $A \cap V$ abgeschlossen ist. Sei also $a \in U$ mit einer Umgebung V wie in ii').
Dann gilt:

$$A \cap V = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(\{0\}),$$

also ist $A \cap V$ abgeschlossen in V.

2. Eine Teilmenge $A \subset U$ heißt *lokal-analytisch*, falls nur Bedingung ii) erfüllt ist.
Zu jeder lokal-analytischen Menge A existiert ein $U' = \overset{\circ}{U'} \subset U$, so daß A analytisch in U'.
Man setze $U' = \cup V$, V offene Umgebung eines Punktes $a \in A$ mit Eigenschaft ii). Wie unter 1b) folgt sofort, daß A abgeschlossen in U'.

Definition. Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$ und A eine analytische Teilmenge von U. Man sagt, A habe in $a \in A$ die Codimension $\geq r$,

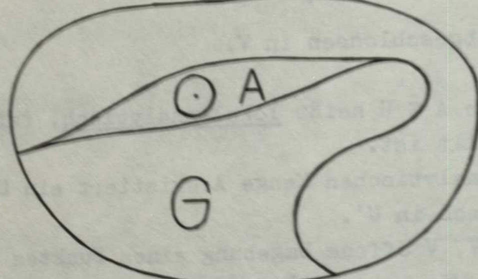
$$\operatorname{codim}_a A \geq r,$$

falls es eine r-dimensionale Ebene E durch a gibt, so daß a isolierter Punkt von $A \cap E$ ist.
Man setzt $\operatorname{codim}_a A = r$, falls $\operatorname{codim}_a A \geq r$, aber nicht $\operatorname{codim}_a A \geq r+1$ und falls $A \neq \emptyset$,

$$\operatorname{codim} A := \inf_{a \in A} \operatorname{codim}_a A.$$

Bemerkung. Sei $U = \mathring{U} \subset \mathbb{C}^n$, $A \subset U$ analytische Teilmenge mit $\operatorname{codim} A \geq 1$. Dann ist $U \setminus A$ dicht in A.
Denn zu jedem Punkt $a \in A$ gibt es auf einer komplexen Geraden E durch a eine Punktfolge aus $U \setminus A$, die gegen a konvergiert.

Satz 1. Sei G Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und $A \subset G$ analytische Teilmenge, die einen inneren Punkt besitzt.
Dann ist $A = G$.
Der folgende Fall kann also nicht auftreten:



Beweis. Sei $\mathring{A} \neq \emptyset$, und $\mathring{A}$ offen. Wir zeigen: $\mathring{A}$ ist abgeschlossen.
Sei $a \in \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} = A$. Es existieren eine offene, zusammenhängende Umgebung V von a und $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{O}(V)$ mit

$$A \cap V = \{z \in V: f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}.$$

$\mathring{A} \cap V \neq \emptyset$ und $f_1|\mathring{A} \cap V = \dots = f_k|\mathring{A} \cap V = 0$.
Identitätssatz $\Rightarrow f_1 = \dots = f_k = 0$ auf V
$\Rightarrow V = A \cap V \subset A \Rightarrow a \in \mathring{A}$.

Corollar. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. $A \subset G$ analytisch, $A \neq G$. Dann gilt $\operatorname{codim} A \geq 1$.

Beweis. Sei $a \in A$. Es gibt eine offene Kugel V um a und $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{O}(V)$ mit

$$A \cap V = \{z \in V: f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}.$$

Da A keine inneren Punkte besitzt, gibt es ein $i \in \{1,\dots,k\}$, so daß $f_i \neq 0$: Sei $c \in V$ mit $f_i(c) \neq 0$.
Sei E die komplexe Gerade durch a und c. Es gilt

$$A \cap V \subset \{z \in V: f_i(z) = 0\},$$
$$(A \cap E) \cap V \subset S := \{z \in E \cap V: f_i(z) = 0\}.$$

S besteht nur aus isolierten Punkten (Identitätssatz einer Veränderlichen!), also ist a isolierter Punkt von $A \cap E$.

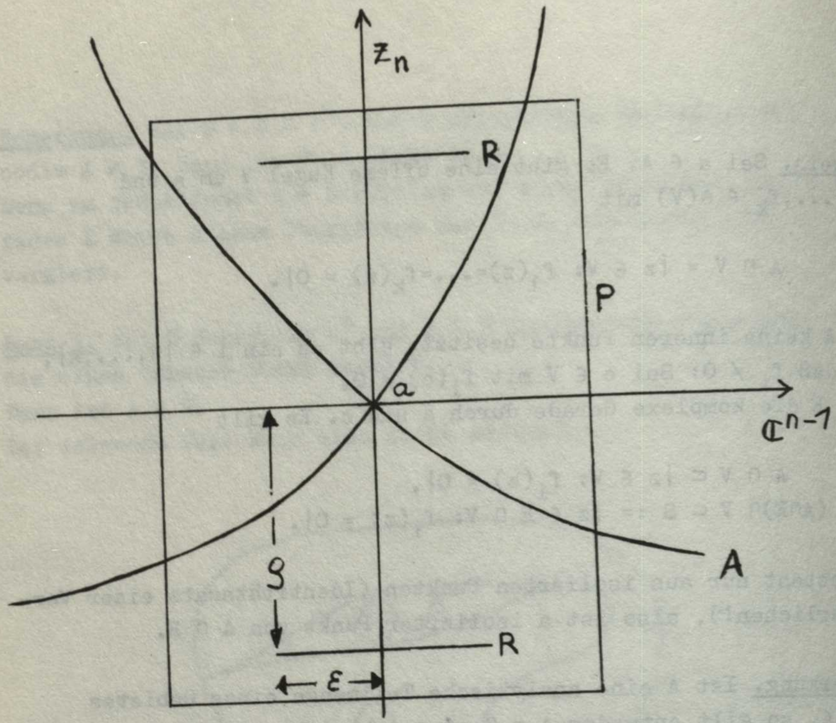
Bemerkung. Ist A eine analytische Teilmenge eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$, so gilt entweder $A = G$ oder A besteht nur aus isolierten Punkten.

Satz 2 (1. Riemannscher Hebbarkeitssatz).
Sei $U = \mathring{U} \subset \mathbb{C}^n$ und $A \subset U$ eine analytische Teilmenge der Codimension ≥ 1. Sei $f \in \mathcal{O}(U \setminus A)$ beschränkt in einer Umgebung jedes Punktes $a \in A$. Dann läßt sich f holomorph nach U fortsetzen, d.h. es gibt ein $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ mit $\tilde{f}|U \setminus A = f$.

Beweis. $\tilde{f}$ ist, falls existent, eindeutig bestimmt, da $U \setminus A$ dicht in U ist. Darum ist das Problem lokaler Natur. Wir dürfen also annehmen, daß A gegeben ist durch

$$A = \{z \in U: f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

wobei $f_i \in \mathcal{O}(U)$, $i = 1,\dots,k$.



Sei $a \in A$. Es gibt eine komplexe Gerade E durch a, so daß a isolierter Punkt von $E \cap A$ ist. O.B.d.A. ist E die z_n-Achse und $a = 0$ (sonst affine Koordinatentransformation). Es existiert ein $r > 0$, so daß

$$P = \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < r\} \subset U.$$

Es existiert ein ρ, $0 < \rho < r$ mit

$$\{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1 = \dots = z_{n-1} = 0, |z_n| = \rho\} \cap A = \emptyset$$

Da $U \setminus A$ offen ist, existiert ein ε, $0 < \varepsilon < r$, so daß für

$$R := \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < \varepsilon \text{ für } \nu = 1,\dots,n-1 \text{ und } |z_n| = \rho\}$$

gilt: $R \subset U \setminus A$.
Für jedes $(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0) \in \mathbb{C}^{n-1}$ mit $|z_\nu^0| < \varepsilon$ gilt:

$$\{z \in \mathbb{C}^n : z_\nu = z_\nu^0 \text{ für } \nu = 1,\dots,n-1, |z_n| < r\}$$

schneidet A nach dem Identitätssatz für eine Veränderliche nur in isolierten Punkten.
Für $z \in \mathbb{C}^n$ mit $|z_\nu| < \varepsilon$ für $\nu = 1,\dots,n-1$ und $|z_n| < \rho$ sei

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho} \frac{f(z_1,\dots,z_{n-1},\zeta)}{\zeta - z_n} \, d\zeta$$

Behauptung. $\tilde{f}$ ist holomorphe Fortsetzung von f.

Beweis. 1) $\tilde{f}$ ist holomorph, da stetig und partiell holomorph (Riemannscher Hebbarkeitssatz für Funktionen einer Veränderlichen).
2) $\tilde{f}$ stimmt im Komplement von A mit f überein (Cauchyscher Integralsatz).

Bemerkung (Verallgemeinerung von Satz 2).
Sei $U = \mathring{U} \subset \mathbb{C}^n$ und $A \subset U$ eine abgeschlossene Menge, die lokal enthalten ist in einer analytischen Menge der Codimension $\geqslant 1$. Sei $f \in \mathcal{O}(U \setminus A)$ beschränkt in einer Umgebung jedes Punktes $a \in A$. Dann läßt sich f holomorph nach U fortsetzen.

Beweis. Es gilt wie in Satz 2, daß das Problem lokaler Natur ist. Wir dürfen also annehmen, daß gilt:
$A \subset B$, wobei B eine analytische Menge der Codimension $\geqslant 1$ ist.

$$f_1 := f|U \setminus B$$

Dann gilt: $f_1 \in \mathcal{O}(U \setminus B)$ und f_1 ist in einer Umgebung jedes Punktes aus B beschränkt, da A abgeschlossen ist. Also läßt sich f_1 fortsetzen zu

$$\tilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

und es gilt: $\tilde{f}|U \setminus B = f_1 = f|U \setminus B \Rightarrow \tilde{f}|U \setminus A = f|U \setminus A = f.$

Corollar. Ist G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und $A \subset G$ eine analytische Teilmenge der Codimension ≥ 1, dann ist $G \setminus A$ ein Gebiet.

Beweis. Annahme: $G \setminus A$ sei nicht zusammenhängend. Dann existieren offene Mengen U_1 und U_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 = G \setminus A$, $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$. Sei $f\colon G \setminus A \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in U_1 \\ 0 & \text{falls } z \in U_2 \end{cases}.$$

Dann gilt $f \in \mathcal{O}(G \setminus A)$. Mit dem 1. Riemannschen Hebbarkeitssatz folgt: f ist holomorph nach G fortsetzbar im Widerspruch zum Identitätssatz.

Satz 3 (Hartogsscher Kontinuitätssatz).
Sei $n \geq 2$ und G ein Gebiet im $\mathbb{C}^{n-1}$. Sei U eine nichtleere offene Teilmenge von G. Seien r_1, r_2 reelle Zahlen mit $0 < r_1 < r_2$ und

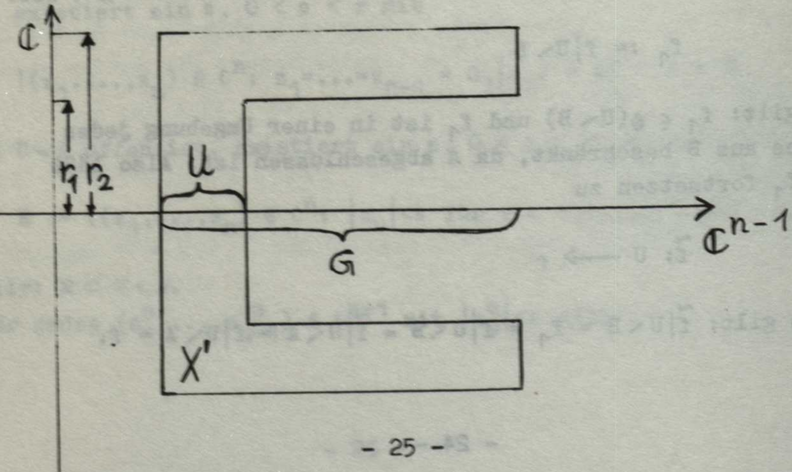
$$S := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < r_2\},$$

$$R := \{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z| < r_2\}.$$

Die Funktion f sei holomorph in

$$X' := (U \times S) \cup (G \times R).$$

Dann läßt sich f holomorph nach $X := G \times S$ fortsetzen.



Beweis. $\tilde{f}(z) := \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta| = \rho} \dfrac{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta)}{\zeta - z_n}\, d\zeta$, wobei $r_1 < \rho < r_2$

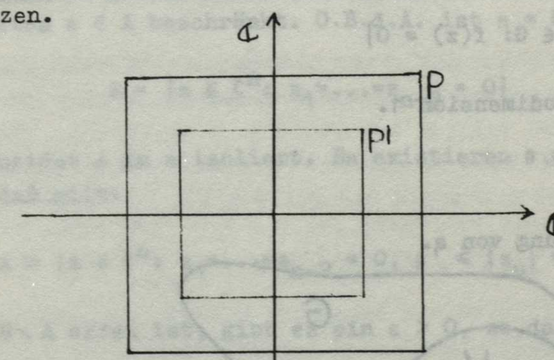
$\tilde{f}$ ist holomorph in $G \times \{z_n \in \mathbb{C}\colon |z_n| < \rho\}$ und stimmt in $U \times \{z_n \in \mathbb{C}\colon |z_n| < \rho\}$ mit f überein. Nach dem Identitätssatz liefert $\tilde{f}$ die holomorphe Fortsetzung von f.

Corollar 1. Sei $n \geq 2$ und $0 < r'_\nu < r_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$.

$$P := \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_\nu| < r_\nu\}$$

$$P' := \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_\nu| < r'_\nu\}.$$

Dann läßt sich jede in $P \setminus \overline{P'}$ holomorphe Funktion nach P fortsetzen.



Beweis. Sei $P_1 := \{z \in \mathbb{C}^{n-1}\colon |z_\nu| < r_\nu\}$,

$P'_1 := \{z \in \mathbb{C}^{n-1}\colon |z_\nu| < r'_\nu\}$

$$S := \{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta| < r_n\}$$

$$R := \{\zeta \in \mathbb{C}\colon r'_n < |\zeta| < r_n\}$$

$$U := P_1 \setminus \overline{P'_1}$$

Dann gilt: $P \setminus \overline{P'} = (U \times S) \cup (P_1 \times R)$.
Hieraus folgt mit Satz 2 die Behauptung.

Corollar 2. Eine holomorphe Funktion von mehr als einer Veränderlichen besitzt keine isolierten Singularitäten.

Corollar 3. Eine holomorphe Funktion von mehr als einer Veränderlichen besitzt keine isolierten Nullstellen.

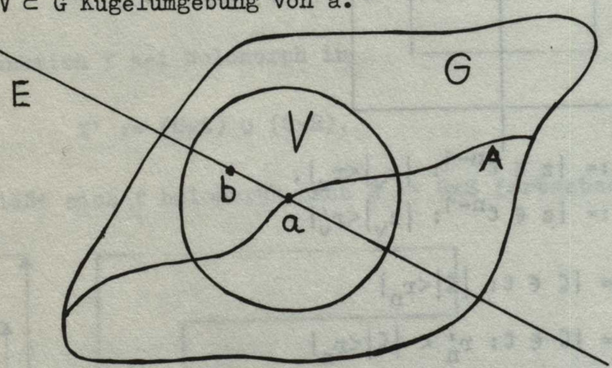
Beweis. Sei $U = \mathring{U} \subset \mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{O}(U)$. Annahme: $a \in U$ sei isolierte Nullstelle. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von a, so daß $\frac{1}{f}$ holomorph in $V \setminus \{a\}$ ist. Nach Corollar 2 ist $\frac{1}{f}$ holomorph nach V fortsetzbar $\Rightarrow f(a) \neq 0$. Widerspruch.

Corollar 4. Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und $f \in \mathcal{O}(G) \setminus \{0\}$. Dann hat die analytische Menge

$$A := \{z \in G\colon f(z) = 0\}$$

in jedem Punkt die Codimension 1.

Beweis. Sei $a \in A$.
i) $\operatorname{codim}_a A \geq 1$:
Sei $V \subset G$ Kugelumgebung von a.



Wegen des Identitätssatzes existiert ein $b \in V$ mit $f(b) \neq 0$. Sei E die komplexe Gerade durch a und b. Dann ist a isolierter Punkt von $A \cap E$, da eine holomorphe Funktion einer Veränderlichen nur isolierte Nullstellen besitzt.

ii) $\operatorname{codim}_a A \not> 2$:

Annahme: $\operatorname{codim}_a A \geq 2$. Dann existiert eine zweidimensionale Ebene E durch a, so daß a isolierter Punkt von $A \cap E$ ist. Dann ist a isolierte Nullstelle von $f|E \cap G$ im Widerpruch zu Corollar 3.

Satz 4 (2. Riemannscher Hebbarkeitssatz).
Sei $U = \mathring{U} \subset \mathbb{C}^n$ und $A \subset U$ eine analytische Teilmenge der Codimension ≥ 2. Dann läßt sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus A)$ zu einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ fortsetzen.

Beweis. Es genügt zu zeigen: f ist in einer Umgebung jedes Punktes $a \in A$ beschränkt. O.B.d.A. ist $a = 0$ und

$$E = \{z \in \mathbb{C}^n\colon z_1 = \ldots = z_{n-2} = 0\}$$

schneidet A in a isoliert. Es existieren ρ, ρ' mit $\rho > \rho' > 0$, so daß gilt:

$$U \setminus A \supset \{z \in \mathbb{C}^n\colon z_1 = \ldots = z_{n-2} = 0,\ \rho' \leq |z_\nu| \leq \rho \text{ für } \nu = n-1, n\}$$

Da $U \setminus A$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für

$$B := \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_\nu| \leq \varepsilon \text{ für } \nu = 1, \ldots, n-2,\ \rho' \leq |z_\nu| \leq \rho \text{ für } \nu = n-1, n\}$$

gilt: $B \subset U \setminus A$. Da B kompakt ist, gilt also $\sup|f(B)| < \infty$.
Aus Corollar 1 und dem Maximumprinzip folgt:

$$\sup\{|f(z)|\colon z \in U \setminus A \text{ mit } |z_\nu| \leq \varepsilon \text{ für } \nu = 1, \ldots, n-2, |z_\nu| < \rho \text{ für } \nu = n-1, n\}$$
$$\leq \sup|f(B)|,$$

d.h. f ist in einer Umgebung von a beschränkt.