Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

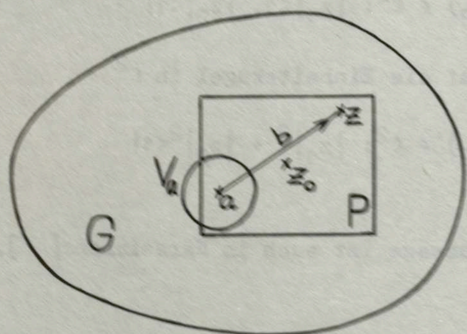
Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

2. Einfache Sätze über holomorphe Funktionen

§ 2. Einfache Sätze über holomorphe Funktionen

Satz 1 (Identitätssatz).
Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und $U \subset G$ eine nichtleere, offene Teilmenge.
Stimmen $f,g \in \mathcal{O}(G)$ auf U überein, so sind sie überhaupt identisch.

Beweis. Sei $Y := \{z \in G: \exists$ Umgebung V von z mit $f|V = g|V\}$
Y ist nichtleer nach Voraussetzung und offen nach Definition.
Beh.: Y ist abgeschlossen in G bzgl. der Relativtopologie.
Beweis: Sei $z_0 \in G$ Randpunkt von Y und P Polyzylinder um z_0 in G. Da $P \cap Y \neq \emptyset$, gibt es ein $a \in P \cap Y$.



Sei $z \in P$, $b := z-a$ und

$$\varphi(t) := f(a+tb) - g(a+tb)$$

φ ist holomorph für alle t aus einer gewissen zusammenhängenden komplexen Umgebung des Intervalls $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Auf einer Umgebung V_a von a stimmen f und g überein, der Identitätssatz einer Veränderlichen impliziert daher $\varphi = 0$, insbesondere $f(z) = g(z)$, also $z_0 \in Y$. Daher ist Y abgeschlossen. Da G zusammenhängt, folgt $Y = G$.

Bemerkung. Stimmen f und g nur auf einer Menge mit Häufungspunkt überein, so sind sie im Gegensatz zur Funktionentheorie einer Veränderlichen noch nicht unbedingt gleich. Sei etwa $f(z_1,z_2) = z_1$ für alle $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$ und g die Nullabbildung auf $\mathbb{C}^2$. Dann gilt: $f,g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ und

$$\{z \in \mathbb{C}^2: f(z) = g(z)\} = \{0\}\times\mathbb{C}$$

Satz 2. Sei $U = \mathring{U} \subset \mathbb{C}^n$ und $f \in \mathcal{O}(U)$. Die Funktion f sei auf keiner Zusammenhangskomponente von U konstant. Dann ist $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine offene Abbildung.

Beweis. Sei $a \in U$ und $V \subset U$ eine Kugelumgebung von a. Nach Satz 1 und Voraussetzung gibt es ein $b \in V$, $a \neq b$ mit $f(a) \neq f(b)$. Sei G die komplexe Gerade durch a und b. Dann ist $f|G \cap V$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion einer Veränderlichen, nach der Funktionentheorie einer Variablen ist daher $f(G \cap V)$ offene Umgebung von $f(a)$.

Satz 3 (Maximumprinzip).
Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$.
Nimmt f das Maximum seines Betrages in einem Punkt $a \in G$ an, so ist f konstant.

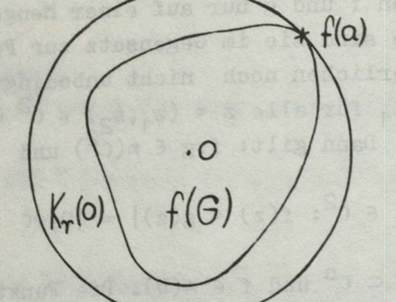
Beweis. Angenommen f ist nicht konstant,

$$|f(a)| = r := \sup|f(G)|.$$

Sicher gilt $|f(a)| \neq 0$, also

$$f(G) \subset K_r(0) := \{z \in \mathbb{C}^n: |z|\leq r\}.$$

Satz 2 $\Rightarrow$ $f(a)$ innerer Punkt von $f(G)$. Widerspruch



Satz 4 (Weierstraß).
Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$ und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U holomorpher Funktionen, die auf jedem kompakten Teil von U gleichmäßig konvergiert. Dann ist

$$f := \lim_{m\to\infty} f_m \in \mathcal{O}(U)$$

und für jedes $\nu = 1,\ldots,n$ konvergiert die Folge

$$\left(\frac{\partial f_m}{\partial z_\nu}\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ kompakt gegen } \frac{\partial f}{\partial z_\nu}.$$

Beweis. a) f ist stetig und partiell holomorph (Satz von Weierstraß für holomorphe Funktionen einer Veränderlichen) also holomorph nach Satz 1, § 1.

b) Sei $K \subset U$ kompakt. Es gibt eine kompakte Menge $K' \subset U$ und ein $r > 0$ mit der Eigenschaft:

$$(z_1,\ldots,z_n) \in K,\ \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta|<r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (z_1,\ldots,z_{\nu-1},z_\nu+\zeta,z_{\nu+1},\ldots,z_n) \in K'$$

Für jedes $F \in \mathcal{O}(U)$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z_\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{F(z_1,\ldots,z_{\nu-1},z_\nu+\zeta,z_{\nu+1},\ldots,z_n)}{\zeta^2}\,d\zeta$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{\partial F}{\partial z_\nu}\right\|_K \leq \frac{1}{r}\|F\|_{K'}.$$

Die kompakte Konvergenz der Folge der partiellen Abbildungen folgt deshalb aus der kompakten Konvergenz der Funktionenfolge.

Satz 5 (Montel).
Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$ und $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U holomorpher Funktionen, die auf jedem kompakten Teil von U gleichmäßig beschränkt sind. Dann enthält $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Teilfolge.
Dabei bedeutet die gleichmäßige Beschränktheit, daß zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ eine Konstante $M_K \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\|f_i\|_K := \sup\{|f_i(z)|: z \in K\} \leq M_K \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Beweis.
1. Fall: U sei der offene Einheitspolyzylinder P im $\mathbb{C}^n$ und es gelte

$$\sup_{z\in P}|f_i(z)| \leq M \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Sei

$$f_i(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_{i\alpha}z^\alpha$$

die Taylorentwicklung von f_i in P.

Dann gilt

$$|c_{i\alpha}| \le M \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ und } i \in \mathbb{N}.$$

Bzgl. einer Anordnung von $\mathbb{N}^n$ gibt es eine Teilfolge $(f_{0i})_{i\in\mathbb{N}}$, so daß die Folge der nullten Koeffizienten konvergiert. Es gibt eine Teilfolge $(f_{1i})_{i\in\mathbb{N}}$, so daß die 0. und 1. Koeffizienten konvergieren, usw. Nach dem Diagonalverfahren gibt es also eine Teilfolge $(f_{\nu_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so daß $(c_{\nu_i\alpha})_{i\in\mathbb{N}}$ gegen ein $c_\alpha \in \mathbb{C}$ konvergiert für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

<u>Behauptung.</u> Die Folge (f_{ν_i}) konvergiert auf P kompakt gegen die Funktion $f \in \mathcal{O}(P)$, wobei

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha.$$

<u>Beweis.</u> Sei $r < 1$ und $K = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| \le r\}$.
Für $z \in K$ gilt dann

$$|f(z)-f_{\nu_i}(z)| = \Big|\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}(c_\alpha - c_{\nu_i\alpha})z^\alpha\Big| \le \sum_{|\alpha|\le k} |c_\alpha - c_{\nu_i\alpha}| + 2M\sum_{|\alpha|>k} r^{|\alpha|}.$$

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein k, so daß der zweite Term kleiner als $\varepsilon/2$ ist. Dann kann man ein n_0 wählen, so daß auch der erste Term kleiner als $\varepsilon/2$ ist für alle $i \ge n_0$.

2. Fall: U beliebige offene Menge im $\mathbb{C}^n$.
Sei $K \subset U$ kompakt. K wird von endlich vielen relativ-kompakten offenen Polyzylindern überdeckt. Nach Fall 1 und dem Diagonalverfahren gibt es dann eine Teilfolge von $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, die auf K gleichmäßig konvergiert.

Es gibt eine Ausschöpfung $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ von U durch kompakte Teilmengen. Durch Konstruktion einer Diagonalfolge bekommt man eine Teilfolge der ursprünglichen Folge, die auf jedem K_i gleichmäßig konvergiert und daher auch auf jeder kompakten Menge $K \subset U$, da jede solche Menge in einem K_i enthalten ist.

<u>Fréchеträume</u>

<u>Definition.</u> Ein <u>topologischer $\mathbb{C}$-Vektorraum</u> ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einer Topologie, so daß folgende Abbildungen stetig sind:

$$\text{i) } +: V \times V \longrightarrow V, \quad (x,y) \longmapsto x+y$$

$$\text{ii) } \cdot: \mathbb{C} \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda,x) \longmapsto \lambda x$$

<u>Bemerkung.</u> Sei V ein topologischer VR, $a \in V$. Dann ist die Translation

$$\tau_a: V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto a+x$$

ein Homöomorphismus. Daher gilt für den Umgebungsfilter $\mathfrak{U}_a$ eines Punktes $a \in V$: $\mathfrak{U}_a = a + \mathfrak{U}_0$.

<u>Definition.</u> Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine <u>Seminorm</u> auf V ist eine Abbildung

$$p: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in V$

ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x,y \in V$.

Eine Familie $(p_i)_{i \in I}$ von Seminormen auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V erzeugt eine Topologie auf V; eine Umgebungsbasis der Null ist gegeben durch Mengen der Form

$$U(p_{i_1},\dots,p_{i_k};\varepsilon) := \{f \in V:\ p_{i_\nu}(f) < \varepsilon \text{ für } \nu = 1,\dots,k\},\ i_\nu \in I, \varepsilon > 0.$$

<u>Definition.</u> Ein <u>Fréchetraum</u> ist ein Hausdorffscher $\mathbb{C}$-Vektorraum, dessen Topologie durch eine abzählbare Familie $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Seminormen definiert werden kann, und in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

Eine Folge $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge genau dann, wenn zu jedem $i \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß $p_i(f_\nu - f_\mu) < \varepsilon$ für alle $\nu, \mu \geq n_0$.

<u>Beispiele.</u>

1) Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n$ und $C(U) :=$ Vektorraum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf U. $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset U$ sei eine kompakte Ausschöpfung von U, d.h. K_ν ist kompakt, $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$, $U = \cup K_\nu$. (Vgl. z.B. Schubert, Topologie S. 71). Wir definieren Seminormen p_ν, $\nu \in \mathbb{N}$:

$$p_\nu(f) := \sup_{x \in K_\nu} |f(x)| \quad f \in C(U).$$

Wie man sich leicht überlegt, ist jedes Element der Nullumgebungsbasis bereits durch eine Seminorm gegeben und jede kompakte Teilmenge von U ist in einem K_ν enthalten.

Zusammen mit der durch die Familie $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ definierten Topologie (diese ist unabhängig von der Auswahl der Ausschöpfung und heißt Topologie der kompakten Konvergenz) ist $C(U)$ ein Fréchetraum.

2) Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$.

$\mathcal{O}(U)$, der Vektorraum der holomorphen Funktionen in U, ist ebenfalls ein Fréchetraum, wenn man $\mathcal{O}(U) \subset C(U)$ mit der Relativtopologie versieht. Dies folgt aus Satz 4.